# 2016 IMC 國際數學競賽 台灣區初賽

2016 International Mathematics Contest (Taiwan)

## 高中二年級組 試卷

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題（每題 10 分）

( A ) 1. Calculate the exact value of (379+379)×500?

(A) 379000 (B) 397000 (C) 558000 (D) 548000

解析：379×2×500=379×1000=379000

( A ) 2. If $\sin\theta$ is one root to this equation $4x^2+4x-3=0$, find $\cos 2\theta$.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{3}$

翻譯：若$\sin\theta$為$4x^2+4x-3=0$之一根，則$\cos 2\theta$之值為多少？

解析：$4x^2+4x-3=0 \Rightarrow (2x+3)(2x-1)=0 \Rightarrow x=\frac{-3}{2}$ 或 $x=\frac{1}{2}$

取$\sin\theta=\frac{1}{2}$，所求$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$

( C ) 3. When John goes out, he has the probability of not bringing his umbrella home averagely once per 5 outgoings. One day, John went to visit Mr. A,B,C by sequence. He found he forgot his umbrella again. What is the probability that the umbrella is at Mr. B's house?

(A) $\frac{10}{61}$ (B) $\frac{15}{61}$ (C) $\frac{20}{61}$ (D) $\frac{25}{61}$

翻譯：約翰外出時，平均每五次有一次忘記帶回自己的雨傘的習慣，有一天約翰帶著雨傘依 A、B、C 順序訪問此三家，回家後才發現忘記帶回雨傘，求雨傘放在 B 家的機率？

解析：$P(\text{忘在 B} \mid \text{忘})=\dfrac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}=\dfrac{20}{25+20+16}=\dfrac{20}{61}$

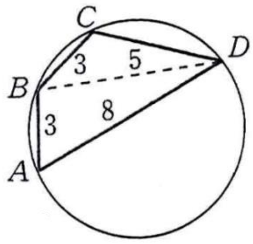
( B ) 4. 試求$\cos65°\sin110°+\cos25°\sin20°=$？ (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

解析：所求為$\cos65°\sin(90°+20°)+\cos(90°-65°)\sin20°$

$$=\cos65°\cos20°+\sin65°\sin20°=\cos(65°-20°)=\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

( D ) 5. 設四邊形 $ABCD$ 內接於一圓，如右圖。其中 $\overline{AB}=\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=8$，求$\overline{BD}$之長。

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7




解析：設$\angle A=\theta$，則$\angle C=180°-\theta$。

故$\overline{BD}^2=3^2+8^2-2\times3\times8\cos\theta=3^2+5^2-2\times3\times5\cos(180°-\theta)$

$\Rightarrow 73-48\cos\theta=34+30\cos\theta$，得$\cos\theta=\frac{1}{2}$，

於是$\overline{BD}^2=73-48\times\frac{1}{2}=49$，得$\overline{BD}=7$。

( B ) 6. 計算$\cos1°+\cos2°+\cdots+\cos179°+\cos180°=$？

(A) 0 (B) $-1$ (C) $-2$ (D) $-\sqrt{2}$

解析：$\because \cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

$\therefore \cos179°=-\cos1°$，$\cos178°=-\cos2°$，…，$\cos91°=-\cos89°$

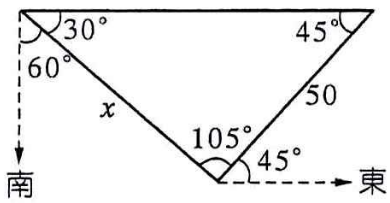
得$\cos1°+\cos2°+\cdots+\cos89°+\cos90°-\cos89°-\cdots-\cos2°-\cos1°+\cos180°$

$=\cos90°+\cos180°=0-1=-1$

( D ) 7. 某君在一廣場之某一點出發，先往東北方前進 50 公尺後，轉往正西方向行進，一段時間後測得，原出發點位在他的南偏東$60°$方向；則此時他距離出發點大約幾公尺？（參考數值：$\sqrt{2}\fallingdotseq1.414214$）

(A) 35 (B) 43 (C) 50 (D) 71 公尺

解析：把題意畫成如右之圖，




由正弦定律知$\frac{x}{\sin45°}=\frac{50}{\sin30°}$

$\sqrt{2}x=100$，$x=\frac{100}{\sqrt{2}}=50\sqrt{2}$

$x\fallingdotseq70.7$，$\therefore$選 D

( B ) 8. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，且$\sin\theta>0$，求$\cos\theta=$？

(A) $-\frac{2}{5}$ (B) $-\frac{3}{5}$ (C) $-\frac{4}{5}$ (D) $-\frac{1}{5}$

解析：① $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{25}\Rightarrow 1+2\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{25}$，$\therefore\sin\theta\cdot\cos\theta=-\frac{12}{25}\cdots\cdots$①

②$\because\sin\theta>0$ $\therefore\cos\theta<0$ 又$\sin\theta=\frac{1}{5}-\cos\theta$

代入①得$(\frac{1}{5}-\cos\theta)\cos\theta=-\frac{12}{25}$ $\therefore 25\cos^2\theta-5\cos\theta-12=0$

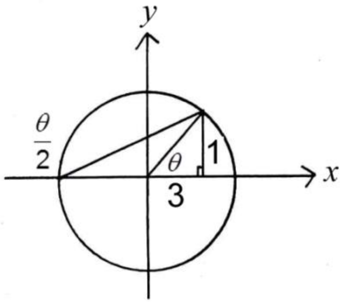
$\therefore(5\cos\theta+3)(5\cos\theta-4)=0$ $\because\cos\theta<0$ $\therefore\cos\theta=-\frac{3}{5}$

( B ) 9. 已知$\tan\theta=\frac{1}{3}$，求$\tan\frac{\theta}{2}=$？

(A) $\sqrt{10}+3$ (B) $\sqrt{10}-3$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\sqrt{10}-1$

解析：$r=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}+3}=\sqrt{10}-3$




( A ) 10. 已知 12 個產品中有 4 個不良品，今逐個檢查，則檢查到第 5 個時，出現第 3 個不良品之機率為？

(A) $\frac{14}{165}$ (B) $\frac{13}{165}$ (C) $\frac{12}{165}$ (D) $\frac{11}{165}$

解析：第 5 次為特殊物先作：又 12 個中有 4 不良⇒就有 8 良

$\underbrace{\text{前 4 次有 2 良}}_{\text{到底哪 2 次良？}}$，2 不良，第 5 次才會有第 3 個不良

到底哪 2 次良？ ∴要選

∴前 4 次選 2 次良，剩 2 次選 2 次不良，第 5 次這 1 次選 1 次不良

一(良) 二(良) 三(不) 四(不) 五(不)

$$C_2^4\times\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\times C_2^2\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times C_1^1\times\frac{2}{8}$$

$$=\frac{\cancel{4!}^{\cancel{2}}}{\cancel{2!}\cancel{2!}}\times\frac{\cancel{8}}{\cancel{12}}\times\frac{7}{11}\times1\times\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{10}_{\cancel{5}}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{9}_{\cancel{3}}}\times1\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{8}}=\frac{14}{165}$$

( D ) 11. 方程式$x^4-4x^3-3x^2+x+1=0$在下列哪兩個整數之間有實數根？

(A) $-3$與$-2$之間　(B) $-2$與$-1$之間

(C) $-1$與 0 之間　(D) 0 與 1 之間

解析：令 $f(x)=x^4-4x^3-3x^2+x+1$

$\Rightarrow f(0)=1$、$f(1)=-4\Rightarrow f(0)f(1)<0$

由勘根定理知$\Rightarrow f(x)=0$在 0 與 1 之間至少有一實根。$\therefore$選 D

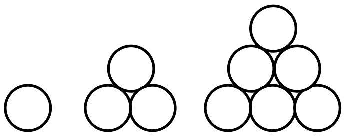
( D ) 12. 滿足不等式$(1.25)^n>10^7$的最小正整數為？（$\log 2=0.3010$）

(A) 70　(B) 71　(C) 72　(D) 73

解析：$\log(\frac{5}{4})^n>\log 10^7\Rightarrow n(\log 5-\log 4)>7\Rightarrow n(1-\log 2-2\log 2)>7$

$\Rightarrow n(1-3\times 0.3010)>7\Rightarrow n\times 0.097>7\Rightarrow n>\dfrac{7}{0.097}\fallingdotseq 72.1\rightarrow 73$

( A ) 13. 三角堆垛，最上層 1 個，第二層 3 個，第三層 6 個，如下圖



… 依此類推，最後一堆 20 層，這 20 堆總共有多少個？ (A) 1540　(B) 1640　(C) 1560　(D) 1660

解析：①第$k$層有$1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$個　$\therefore$第 20 層有 210 個

②總和$s=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}k(k+1)=\dfrac{1}{2}[\sum_{k=1}^{20}k^2+\sum_{k=1}^{20}k]=\dfrac{1}{2}[\dfrac{20\times 21\times 41}{6}+\dfrac{20\times 21}{2}]=1540$

( B ) 14. 有渡船 3 艘，每艘船最多可載 6 個人，今有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛共 8 個人欲渡河，則安全過渡的方法有幾種？

(A) 6410　(B) 6510　(C) 6610　(D) 6710

解析：所求=任意搭的方法數$-$8 人同船的方法數$-$7 人同船的方法數

$=3^8-3-8\cdot 3!=6561-3-48=6510$

( C ) 15. 求 $(x-2)^8\cdot(x+1)^5$ 展式中 $x^{12}$ 項的係數為？

(A) $-9$　　(B) $-10$　　(C) $-11$　　(D) $-12$

解析：$(x-2)^8(x+1)^5$ 展開式中 $x^{12}$ 項可由

①$(x-2)^8$ 展開式中 $x^8$ 項與 $(x+1)^5$ 展開式中 $x^4$ 項相乘，以及

②$(x-2)^8$ 展開式中 $x^7$ 項與 $(x+1)^5$ 展開式中 $x^5$ 項相乘而得，

所以 $(x-2)^8(x+1)^5$ 展開式中 $x^{12}$ 項為 $c^8_0x^8\cdot c^5_1x^4+c^8_1x^7(-2)^1\cdot c^5_0x^5$

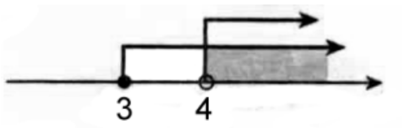
$=(c^8_0c^5_1-2c^8_1c^5_0)x^{12}$，其係數為 $c^8_0c^5_1-2c^8_1c^5_0=5-16=-11$

( B ) 16. 求 $|\,x+1\,|+|\,x-3\,|>6$ 的解？

(A) $-2<x<4$　　(B) $x>4$ 或 $x<-2$

(C) $-1<x<3$　　(D) $x>3$ 或 $x<-1$

解析：


(1)當 $x\geq 3$ 時，$x+1+x-3>6\to x>4\cdots\cdots$①

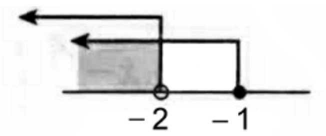
(2)當 $-1<x<3$ 時，$x+1>0$，$x-3<0$

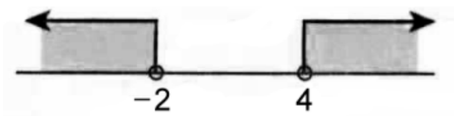
$x+1-x+3>6\to 4>6$ 不合$\cdots\cdots$②

(3)當 $x\leq -1$ 時，$x+1\leq 0$，$x-3<0$

$-x-1-x+3>6\to -2x+4\to x<-2\cdots\cdots$③

由①②③得 $x>4$ 或 $x<-2$ 為所求




( A ) 17. 不論 $x$ 為任何實數值，$\dfrac{x^2+ax+b}{3x^2+2x+1}$ 之值恆 $k$ 為一定數，則 $a+b+k=$？

(A) $\dfrac{4}{3}$　　(B)1　　(C) $\dfrac{5}{3}$　　(D) 2

解析：$\dfrac{x^2+ax+b}{3x^2+2x+1}=k$ 恆成立 $\Rightarrow x^2+ax+b=k(3x^2+2x+1)=3kx^2+2kx+k$

比較係數得 $1=3k$，$a=2k$，$b=k$　　$\therefore k=\dfrac{1}{3}$，$a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{1}{3}$

( C ) 18. 對任意實數 $x$ 值，二次函數 $f(x)=x^2+ax+a$ 之值恆大於 $-8$，則實數 $a$ 的範圍為何？

(A) $-8<a<4$　　(B) $a>4$ 或 $a<-8$

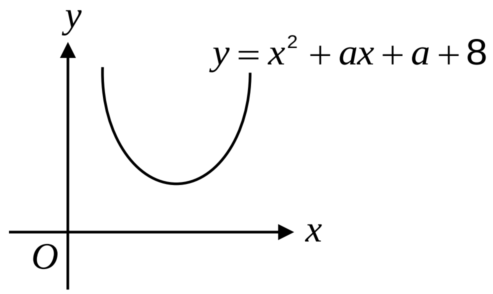
(C) $-4<a<8$　　(D) $a>8$ 或 $a<-4$

解析：$f(x)=x^2+ax+a>-8$，對所有實數 $x$

$\rightarrow y=x^2+ax+a+8>0$，對所有實數 $x$

則 $D=a^2-4(a+8)<0$ $\rightarrow$ $a^2-4a-32<0$，

$\rightarrow (a-8)(a+4)<0$，$\therefore -4<a<8$




( C ) 19. 求 $15^7-230\times15^5+78\times15^4-46\times15^3-5\times15^2+270\times15+50=$？

(A) $-200$　　(B) $-300$　　(C) $-400$　　(D) $-500$

解析：原式 $\rightarrow$ $f(x)=x^7-230x^5+78x^4-46x^3-5x^2+270x+50$，

求 $f(15)$ 即求 $f(x)$ 除以 $x-15$ 之餘式

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | +0 | −230 | +78 | −46 | −5 | +270 | +50 | 15 |
| | +15 | +225 | −75 | +45 | −15 | −300 | −450 | |
| 1 | +15 | −5 | +3 | −1 | −20 | −30 | −400 | |

答: $-400$

( B ) 20. $x$、$y$、$z$ 是正實數 $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$，求 $x\cdot y\cdot z=$？

(A) 5　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8

解析：$x\geq0$，$y\geq1$，$z\geq2$，$2\sqrt{x}+2\sqrt{y-1}+2\sqrt{z-2}=x+y+z$

$x-2\sqrt{x}+y-2\sqrt{y-1}+z-2\sqrt{z-2}=0$

$[(\sqrt{x})^2-2(\sqrt{x})+1^2]+[(\sqrt{y-1})^2-2(\sqrt{y-1})+1^2]+[(\sqrt{z-2})^2-2(\sqrt{z-2})+1^2]=0$

$(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y-1}-1)^2+(\sqrt{z-2}-1)^2=0$

$\sqrt{x}-1=0$，$\sqrt{y-1}-1=0$，$\sqrt{z-2}-1=0$，$\sqrt{x}=1$，$\sqrt{y-1}=1$

$\sqrt{z-2}=1$，$x=1$，$y-1=1$，$z-2=1$，$y=2$，$z=3\Rightarrow x\cdot y\cdot z=1\cdot2\cdot3=6$

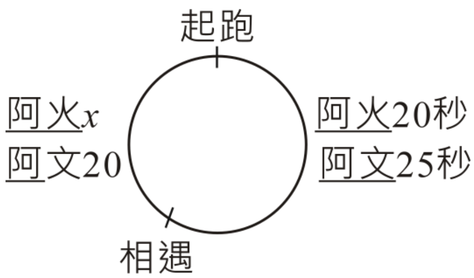
( B ) 21. 你參加賽跑，追過第 2 名，你是第幾名？

(A) 第 1 名　　(B) 第 2 名　　(C) 第 3 名　　(D) 第 4 名

解析：追過第 2 名，取代他的名次，所以你是第 2 名

( C ) 22. 有一個環形跑道，阿文、阿火從休息亭起跑，阿文跑一圈需要 45 秒，阿火反方向跑，每 20 秒會和阿文相遇一次，請問阿火跑一圈需要幾秒？ (A) 25　　(B) 30　　(C) 36　　(D) 40

解析：




45–20=25

$x$：20=20：25，$x$=16

∴20+16=36

( B ) 23. 某校由 200 位學生投票選拔三位模範生（一人一票，有可能無效票），已知有 6 位侯選人，選舉結果每人票數都不同，且每人至少有一票。結果周吉倫當選且票數是第 3 高，那麼他最多可能有幾票？

(A) 62　　(B) 63　　(C) 64　　(D) 65

解析：令周吉倫得 $x$ 票

→ $x+2+x+1+x+3+2+1\le 200$

→ $x\le 63\frac{2}{3}$，$x$ 最大=63

對周最有利

| 名次 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 票 | $x+2$ | $x+1$ | $x$ | 3 | 2 | 1 |

算術：$(200-3-2-1-1-2)\div 3=63\frac{2}{3}$　∴最多 63 票

( A ) 24. 在一慈善捐款活動中有 $a_1$ 個人至少捐 1 萬元，有 $a_2$ 個人至少捐 2 萬元，有 $a_3$ 個人至少捐 3 萬元……，有 $a_n$ 個人至少捐 $n$ 萬元，沒人捐超過 $n$ 萬元，總共收到捐款多少萬元？

(A) $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$　　(B) $a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n$

(C) $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\cdots\times a_n$　　(D) $(1+2+3+\cdots\cdots+n)\times a_n$

解析：$1\times(a_1-a_2)+2\times(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+4(a_4-a_5)+\cdots\cdots+n(a_{n-1}-a_n)$

$=a_1-a_2+2a_2-2a_3+3a_3-3a_4+4a_4-4a_5+\cdots\cdots+na_{n-1}-na_n$

$=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots+a_n$

( B ) 25. A、B、C、D 四人作○×是非題，他們的答案如下表所示。
A 與 B 得 70 分，C 得 60 分，求 D 之得分。(答對一題得 10 分)

| | 第1問 | 第2問 | 第3問 | 第4問 | 第5問 | 第6問 | 第7問 | 第8問 | 第9問 | 第10問 | 分數 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | ○ | × | ○ | × | ○ | ○ | × | × | × | ○ | 70 |
| B | ○ | ○ | × | × | × | ○ | ○ | ○ | × | × | 70 |
| C | × | × | × | ○ | ○ | × | ○ | × | ○ | × | 60 |
| D | ○ | × | × | ○ | ○ | × | × | ○ | × | × | ? |

(A) 50　(B) 60 分　(C) 70 分　(D) 80 分

解析：A 與 B 每人答對 7 題，2 人合計答對 14 題。但兩人的答案只有 4 題相同，其餘的 6 題不同。後者（答案不同）的 6 題中必然有 6 個正解，因此前者（答案相同）的 4 題中有 8 個正解，即全部為正解。
這四題及其正解為第 1 題（○），第 4 題（×），第 6 題（○），第 9 題（×）。
在 C 的答案中上述四題皆答錯了，由其得分為 60 可知其他六題他全答對了。
根據上述資料，D 答對的是第 1、2、3、5、9、10 題，故得分為 60。

| | 第1問 | 第2問 | 第3問 | 第4問 | 第5問 | 第6問 | 第7問 | 第8問 | 第9問 | 第10問 | 分數 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | ○ | × | ○ | × | ○ | ○ | × | × | × | ○ | 70 | |
| B | ○ | ○ | × | × | × | ○ | ○ | ○ | × | × | 70 | |
| C | × | × | × | ○ | ○ | × | ○ | × | ○ | × | 60 | |
| D | ○ | × | × | ○ | ○ | × | × | ○ | × | × | ? | ➡60 分 |
| 正解 | ○ | × | × | × | ○ | ○ | ○ | × | × | × | | |

二、計算題（每題 25 分）

1. 找規則律。

【例】：

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 4 | 2 | | 5 | 4 | | 7 |
| | 2 | | | 19 | | | ? | |
| 2 | | 3 | 3 | | 4 | 5 | | 6 |

【解】：$1\times2\times3-4=2$，$2\times3\times4-5=19$，$4\times5\times6-7=113$⋯⋯答

(1) 找出下列 ? 是多少。

（提供 1 種解法得 10 分，提供 2 種不同解法得 15 分）

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | | 2 | 5 | | 10 | 9 | | 2 |
| | 6 | | | 20 | | | ? | |
| 2 | | 4 | 8 | | 2 | 4 | | 10 |

(2) 仿上自己創造題目並解答。

（至少 2 種+、−、×、÷運算且答案是正整數，10 分）

解析：(1) 參考解答 $7\times2-4\times2=6$，$5\times8-2\times10=20$，$9\times4-10\times2=16$

另解 1. $(7-1)\times2-2-4=6$ 另解 2. $7+2-4+2-1=6$

$(5-1)\times8-10-2=20$ $5+10-2+8-1=20$

$(9-1)\times4-2-10=20$ $9+2-10+4-1=4$

(2)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | | 4 | 7 | | 5 | 10 | | 7 |
| | 23 | | | 43 | | | ? | |
| 3 | | 2 | 4 | | 3 | 2 | | 3 |

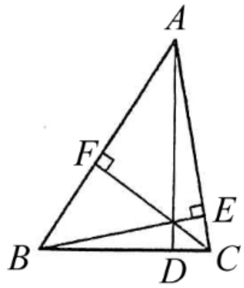
$5\times3+4\times2=23$，$7\times4+5\times3=43$，$10\times2+7\times3=41$

2. 設△$ABC$的三高分別為$\overline{AD}=6$、$\overline{BE}=4$，$\overline{CF}=3$

(1) 試證：△$ABC$為鈍角三角形。(15 分)

(2) 試求△$ABC$的面積。(10 分)

解析：(1) 令$\overline{BC}=a$、$\overline{CA}=b$、$\overline{AB}=c$




$\because \overline{AD}=6$，$\overline{BE}=4$，$\overline{CF}=3$

$\therefore a:b:c=\dfrac{1}{6}:\dfrac{1}{4}:\dfrac{1}{3}=2:3:4$

令$a=2t$、$b=3t$、$c=4t$

$\Rightarrow \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot 2\cdot 3}=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore \angle C>90°$　$\therefore$△$ABC$為鈍角三角形

(2) 由海龍公式知△$ABC$之面積為$\sqrt{\dfrac{9}{2}t\cdot\dfrac{5}{2}t\cdot\dfrac{3}{2}t\cdot\dfrac{1}{2}t}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}t^2$

又$\overline{BC}=2t$，$\overline{AD}=6$

$\therefore$△$ABC$之面積$=\dfrac{1}{2}\cdot 2t\cdot 6=6t$

$\therefore \dfrac{3\sqrt{15}}{4}t^2=6t$　$\therefore t=\dfrac{8}{\sqrt{15}}$

$\therefore$△$ABC$之面積$6t=\dfrac{48}{\sqrt{15}}=\dfrac{16\sqrt{15}}{5}$