

2015 第十一屆 國際數學競賽(複賽)台灣

2015 Eleventh International Mathematics Contest (Taiwan)

高 中 一 年 級 試 卷

考試時間：90 分鐘

卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻開》

2015 第十一屆 國際數學競賽(複賽)台灣

2015 Eleventh International Mathematics Contest (Taiwan)

※請將答案寫在答案卷上

一、填充題 I (每格 4 分, 共 28 分)

1. 將 $\frac{32459}{49950}$ 化成小數後, 則小數點以下第 2015 位數為 ①。
2. 設 $q(x)$ 為非負實係數的多項式, 若 $q(10)=13$, $q(11)=14$, $q(12)=15$, 求 $q(2015)$
= ②。
3. 設 $x, y \in \mathbb{Q}$ 且 $x\sqrt{3+2\sqrt{2}} - y\sqrt{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{18-8\sqrt{2}}$, 則 $(x, y) =$ ③。
4. 某甲提款時發現忘了正確密碼, 只記得是由 2, 0, 1, 5 四個相異數字排成的。已知提款機設定當輸入的密碼錯誤達三次時, 會沒收該提款卡。某甲嘗試輸入不同密碼, 則某甲的提款卡會被沒收的機率是 ④。
5. 設 a 為實數, 且 $(a+i)^2=8+6i$, 求 $(a+i)^3 =$ ⑤。
6. 已知 A, B 為銳角, 且滿足 $\tan A \cdot \tan B = \tan A + \tan B + 1$, 則 $\cos(A+B) =$ ⑥。
7. What is the greatest positive integer n such that 2^n is a factor of 12^{10} ? ⑦。

二、填充題 II (每格 6 分, 共 48 分)

1. 設 α, β 為 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的二根, 則 $\frac{\alpha^3}{\alpha^2 - 4} + \frac{\beta^3}{\beta^2 - 4} = \underline{\text{①}}$ 。

2. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid y = ax + 2\}$, $B = \{(x, y) \mid y = |x + 1|\}$, 且 $\text{Card}(A \cap B) = 1$, 則 a 的取值範圍是 $\underline{\text{②}}$ 。

3. 若 $(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \times \dots \times (1 - \frac{1}{99^2}) = \frac{q}{p}$, 其中 p, q 為互質的正整數, 則 $p + q = \underline{\text{③}}$ 。

4. 設實數 x, y 滿足 $\begin{cases} (x-1)^3 + 2005(x-1) = -1 \\ (y-1)^3 + 2005(y-1) = 1 \end{cases}$, 那麼 $x+y = \underline{\text{④}}$ 。

5. 從 1、2、3、...、20 中, 任取 3 個不同的數, 使這 3 個數按從小至大排列組成等差數列, 那麼這樣的等差數列有 $\underline{\text{⑤}}$ 個。

6. 若函數 $f(x)$ 滿足: $f(x+y) = f(x)f(y)$, 對任意實數 x, y 成立, 且 $f(1) = 2$, 則 $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \dots + \frac{f(2005)}{f(2004)} = \underline{\text{⑥}}$ 。

7. 已知 $A \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 2013\}$, 滿足: A 中任意兩個元素之差的絕對值不等於 3 或 4 或 5, 求 $|A|$ 的最大值為 $\underline{\text{⑦}}$ 。

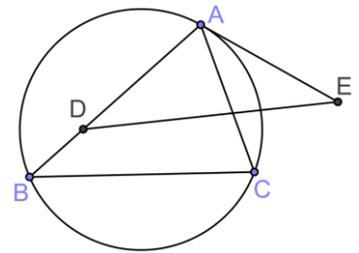
8. Compute: $\sqrt{2009\sqrt{2009^2\sqrt{2009^3\cdots}}} = \underline{\text{⑧}}$ 。

三、簡答題（每題 8 分，共 24 分）

1. 求使得不等式 $\frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \frac{1}{3+n} + \dots + \frac{1}{1+3n} > 2a-3$ 對一切正整數 n 都成立的自然數 a 的最大值。

2. 如圖 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} > \overline{AC}$ ， \overline{AE} 是其外接圓的切線， D 為 \overline{AB} 上的點，且 $\overline{AD} = \overline{AC} = \overline{AE}$ 。

求證：直線 \overline{DE} 過 $\triangle ABC$ 的內心。



3. 工廠要生產某零件 2010 個，需要 7 天完成，每天都比前一天的產量多，且已知第一天的產量不少於 50 個，第三天產量是第一天和第二天產量之和，之後的每一天的產量都是前兩天的產量之和，問第三天的產量是多少？