



高中二年級 決賽試題

◎ 第1-16題請將答案填寫在下面答案表內！

◎ 第17-18題需在試題空白處寫出計算過程，否則不予計分！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								
填充題	9	10	11	12	13	14	15	16
答案								

一、選擇題 (每小題 5 分，共 40 分)

- 已知函數 $f(x) = \frac{a-x}{x-a-1}$ ，其反函數 $f^{-1}(x)$ 的圖像的對稱中心為點 $M(m,3)$ ，則 a^m 為 ()。

A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
- Let real numbers m, n, x and y satisfy $m^2+n^2=a, x^2+y^2=b$, where a, b are constants (正常數) and $a \neq b$, Determine the minimum value of $mx+ny$.

A. $-\frac{a+b}{2}$ B. $-\sqrt{ab}$ C. $-\frac{2ab}{a+b}$ D. $-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$
- $\{F_n\}$ 表示常見的 *Fibonacci* 數列： $F_0=0, F_1=1, F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ (n 為任意自然數)，設 $G_n = \sum_{i=1}^n F_{2i}$ ， $H_n = \sum_{i=1}^n F_{2i-1}$ ，那麼 $G_{2015} - H_{2015}$ 的值为 ()。

A. F_{2015} B. F_{4029} C. H_{2014} D. G_{2014}
- 在平面 α 中， $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 關於直線 m 對稱 (且兩三角形分居直線 m 的兩側)，現將 α 沿直線 m 折成直二面角，則由 A, B, C, A', B', C' 六個點所能確定的平面個數為 ()。

A. 11 B. 14 C. 17 D. 20

5. 已知 $x_1=16$, $x_2=14$, $x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2 - 4}{x_n}$ ($\forall n \geq 1$), 則數列 $\{x_n\}$ 的性質是 ()。
- A. 只有有限項, 且對數列中連續三項, 總有 $x_{n+2}=2x_{n+1}-x_n$
 B. 有無窮多項, 且對數列中連續三項, 總有 $x_{n+2}=2x_{n+1}-x_n$
 C. 只有有限項, 且存在數列中連續三項, 使 $x_{n+2} \neq 2x_{n+1}-x_n$
 D. 有無窮多項, 且存在數列中連續三項, 使 $x_{n+2} \neq 2x_{n+1}-x_n$
6. 在平面直角坐標行中, 若方程 $m(x^2 + y^2 + 2y + 1) = (x - 2y + 3)^2$ 表示的曲線為橢圓, 則實係數 m 的取值範圍是 ()。 A. (0,1) B. (1,+ ∞) C. (0,5) D. (5,+ ∞)
7. 集合 $A = \{1, 2, \dots, 2015\}$, 則定義在 A 上的單調遞增函數 $f: A \rightarrow A$ (即 $\forall x, y \in A, x \leq y$, 有 $f(x) \leq f(y)$) 共有 () 個。
- A. C_{4030}^{2015} B. C_{4029}^{2015} C. C_{4028}^{2015} D. C_{4028}^{2014}
8. 已知拋物線 $y^2=ax$ 與其關於點(1,1)對稱的曲線恰有兩個不同的交點, 且這兩個交點所在直線與 x 軸夾角為 45° , 那麼實數 $a=$ _____。
- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

二、填空题 (每小題 5 分, 共 40 分)

9. In the sequence $\{a_n\}$, $a_1 = 2$ and $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$ for all positive integers (正整數) ($\forall n \geq 1$), Determine $\sum_{k=1}^{2015} a_k =$ _____.
10. 二次曲線: $3x^2 - 8xy + 7y^2 + 4x - 2y - 109 = 0$ 上的整點 (x, y) 共有_____個。
11. 已知 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 兩個對數 $\log_{\sin x} \cos x$ 與 $\log_{\cos x} \sqrt{\tan x}$ 均不為 0, 且和為 1, 則 $\sin x =$ _____。
12. It is known $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(3^x + 1) + 5abx$ is an even function (偶函數) while $g(x) = 2^x + \frac{a+b}{2^x}$ is an odd function (奇函數). Find the value of $a^3 + b^3$. _____.

13. $\triangle ABC$ 的三邊邊長 $AB=n+3x$ ， $BC=n+2x$ ， $CA=n+x$ 且 BC 邊上的高 $AD=n$ ，其中 n 為正整數且 $0 < x \leq 1$ ，則滿足上述條件的 $\triangle ABC$ 共有_____個（互不全等意義下）。
14. 三棱臺 $ABC - A_1B_1C_1$ 的任意兩個側面所成的二面角都是直二面角，高為 $\frac{3\sqrt{34}}{17}$ cm，且下底面 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=5$ cm， $BC = 4\sqrt{2}$ cm，則棱臺體積為_____cm³。
15. 設 $y=f(x)$ 是定義在實數域上的實函數，且滿足 $f(a \cdot f(b)) = ab$ ($\forall a, b \in R$)，那麼 $f(2015) =$ _____（求出所有可能取值）。
16. 已知三次函數 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 的圖像與 x 軸（從左至右）順次交於三個點 A 、 B 、 C ， AP 、 CQ 是函數圖像的切線（ P 與 A 不同， Q 與 C 不同， P 、 Q 為切點），則 $|AC|$ 與線段 PQ 在 x 軸上的投影長度之比為_____：_____。

三、簡答題（每小題 10 分，共 20 分，請簡要寫出解答過程）

17. 求證：存在唯一的無窮項正數數列 $\{a_n\}$ ， $n \in N^*$ 滿足：
- (1) $a_1 = 2\sqrt{3}$ ；
- (2) $\forall n \geq 2$ ， $a_{n-1} = \frac{8a_n}{4 - a_n^2}$ ，且這個數列 $\{a_n\}$ 是單調遞減的；求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

18. 求證： $\sum_{k=0}^{1000} \binom{1000}{k} \binom{2015+k}{2015} (-1)^k = \binom{2015}{1015}$ ；其中 $\binom{n}{m} = C_n^m$

