



高中一年級 決賽試題

◎ 第1-16題請將答案填寫在下面答案表內！

◎ 第17-18題需在試題空白處寫出計算過程，否則不予計分！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案								
填空題	9	10	11	12	13	14	15	16
答 案								

一、選擇題 (每小題 5 分，共 40 分)

- 若 $M = \{(x, y) \mid |\tan(\pi x)| + \sin^2(\pi y) = 0\}$ ， $N = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$ ，則 $|M \cap N| = (\quad)$ 。
A. 4 B. 5 C. 8 D. 9
- In $\triangle ABC$ and $\triangle A'B'C'$, if $\angle A = \angle A'$ and $\sin B + \sin C > \sin B' + \sin C'$, then which of the following statements is the correct statement?
A. $B - C > B' - C'$ B. $|B - C| > |B' - C'|$ C. $B - C < B' - C'$ D. $|B - C| < |B' - C'|$
- $\{F_n\}$ 表示常見的 Fibonacci 數列： $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (n 為任意自然數)，設 $G_n = \sum_{i=1}^n F_{2i}$ ， $H_n = \sum_{i=1}^n F_{2i-1}$ ，那麼 $G_{2015} - H_{2015}$ 的值為 (\quad) 。
A. F_{2015} B. F_{4029} C. H_{2014} D. G_{2014}
- 設 a, b, c 為實數，那麼對任意實數 x ，不等式 $a \sin x + b \cos x + c > 0$ 恆成立的充分必要條件是 (\quad) 。
A. $a = b = 0$ 且 $c > 0$ B. $\sqrt{a^2 + b^2} = c$ C. $\sqrt{a^2 + b^2} < c$ D. $\sqrt{a^2 + b^2} > c$
- 已知 $x_1 = 16, x_2 = 14, x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2 - 4}{x_n}$ ($\forall n \geq 1$)，則數列 $\{x_n\}$ 的性質是 (\quad) 。

- A. 只有有限項，且對數列中連續三項，總有 $x_{n+2}=2x_{n+1}-x_n$
 B. 有無窮多項，且對數列中連續三項，總有 $x_{n+2}=2x_{n+1}-x_n$
 C. 只有有限項，且存在數列中連續三項，使 $x_{n+2}\neq 2x_{n+1}-x_n$
 D. 有無窮多項，且存在數列中連續三項，使 $x_{n+2}\neq 2x_{n+1}-x_n$

6. 直線 $x\cos\theta + y + 2015 = 0$ 中， θ 是某三角形的最大內角，則這樣的直線的傾斜角的變化範圍是 ()。

- A. $[-\arctan\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4})$ B. $[0, \frac{\pi}{4}) \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi)$ C. $[0, \frac{\pi}{4})$ D. $[0, \frac{\pi}{4}) \cup [\pi - \arctan\frac{1}{2}, \pi)$

7. 集合 $A = \{1, 2, \dots, 2015\}$ ，則定義在 A 上的單調遞增函數 $f: A \rightarrow A$ (即 $\forall x, y \in A, x \leq y$ ，有 $f(x) \leq f(y)$) 共有 () 個。

- A. C_{4030}^{2015} B. C_{4029}^{2015} C. C_{4028}^{2015} D. C_{4028}^{2014}

8. 已知函數 $f(x) = \lg(x+1)$ ，當 (x, y) 在 $y=f(x)$ 的圖像上運動時，點 $(\frac{x}{3}, \frac{y}{2})$ 在函數 $y=g(x)$ 的圖像上運動，則函數 $h(x) = g(x) - f(x)$ 的最大值是 ()。

- A. $\frac{1}{2} \lg \frac{8}{9}$ B. $-\frac{1}{2} \lg \frac{8}{9}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 0

二、填空題 (每小題 5 分，共 40 分)

9. 已知拋物線 $y^2 = ax$ 與其關於點 $(1, 1)$ 對稱的曲線恰有兩個不同的交點，且這兩個交點所在直線與 x 軸夾角為 45° ，那麼實數 $a =$ _____。

10. In the sequence $\{a_n\}$, $a_1 = 2$ and $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$ for all positive integers (正整數) ($\forall n \geq 1$),

Determine $\sum_{k=1}^{2015} a_k =$ _____.

11. 已知二次函數 $f(x) = x^2 + (\lg a + 2)x + \lg b$ ，且 $f(-1) = -2$ ，對一切 $x \in R$ ， $f(x) \geq 2x$ 恆成立，則 $a + b =$ _____。

12. It is known $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(3^x + 1) + 5abx$ is an even function (偶函數) while

$g(x) = 2^x + \frac{a+b}{2^x}$ is an odd function (奇函數). Find the value of $a^3 + b^3$. _____.

13. 已知 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 兩個對數 $\log_{\sin x} \cos x$ 與 $\log_{\cos x} \sqrt{\tan x}$ 均不為 0, 且和為 1, 則 $\sin x =$ _____。

14. $\triangle ABC$ 的三邊邊長 $AB=n+3x$, $BC=n+2x$, $CA=n+x$ 且 BC 邊上的高 $AD=n$, 其中 n 為正整數且 $0 < x \leq 1$, 則滿足上述條件的 $\triangle ABC$ 共有 _____ 個 (互不全等意義下)。

15. 設 $y=f(x)$ 是定義在實數域上的實函數, 且滿足 $f(a \cdot f(b)) = ab$ ($\forall a, b \in R$), 那麼 $f(2015) =$ _____ (求出所有可能取值)。

16. 已知不等式 $a \leq \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4 \leq b$ 的解集是 $\{a \leq x \leq b\}$ (其中 $a < b$) 則 $b =$ _____。

三、簡答題 (每小題 10 分, 共 20 分, 請簡要寫出解答過程)

17. 已知滿足不等式 $\lg(20 - 5x^2) > \lg(a - x) + 1$ 的整數 x 只有一個, (其中 a 為常數) 求常數 a 的取值範圍。

18. 求證：存在唯一的無窮項正數數列 $\{a_n\}$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ 滿足：

(1) $a_1 = 2\sqrt{3}$ ；

(2) $\forall n \geq 2$ ， $a_{n-1} = \frac{8a_n}{4 - a_n^2}$ ，且這個數列 $\{a_n\}$ 是單調遞減的；求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

