2015年第11屆IMC國際數學競賽(新加坡)

Eleventh IMC International Mathematics Contest (singapore), 2015

國中三年級 決賽試題解答

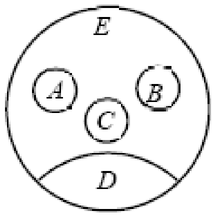
◎ 第1-16題請將答案填寫在下面答案表內！

◎ 第17-18題需在試題空白處寫出計算過程，否則不予計分！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	B	C	B	D	A	B	A	C
填空題	9	10	11	12	13	14	15	16
答　案	$2\sqrt{2}$	2	$\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-4\\y=24\end{cases}$	$5+\frac{5}{3}\sqrt{3}$	40.5	$\frac{3}{4}$	4	5

一、選擇題（每小題 5 分，共 40 分）

1. 如圖一個簡單臉譜由 A、B、C、D、E 五塊區域組成，現用紅、黃、藍、綠四種顏色對這五塊區域染色，要求有公共邊界的區域要用不同顏色區分開，且兩只“眼睛”要同色，那麼染錯的機率 P 為(　　)。

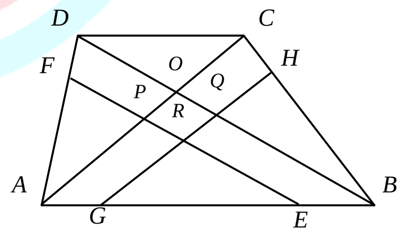


A. 80%<P<85%　　B. 85%<P<90%　　C. 90%<P<95%　　D. P>95%

答案：B

解答：$P=1-\dfrac{4\times3\times1\times3\times3}{4^5}=\dfrac{229}{256}\approx0.89$

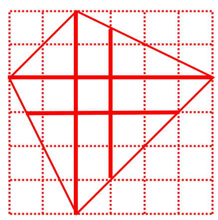
2. The area of trapezoid（梯形）$ABCD$ at the right figure is 1 square unit, $AB//CD$, $EF//BD$, $GH//AC$, with AB=2CD, AP=PC, BQ=QD, What is the area of quadrilateral（四邊形）$_{PRQO}$=?



A. $\dfrac{1}{9}$　　B. $\dfrac{1}{12}$　　C. $\dfrac{1}{18}$　　D. $\dfrac{1}{36}$

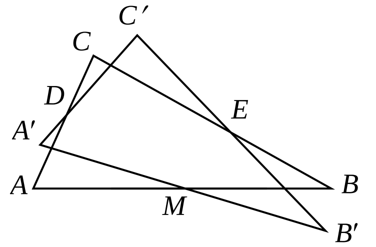
答案：C

翻譯：如圖，梯形 $ABCD$ 面積為 1，$AB//CD$，$EF//BD$，$GH//AC$，且 AB=2CD，AP=PC，BQ=QD，那麼 $S_{四邊形\ PRQO}$=（　　）。



解答：如圖，將梯形 $ABCD$ 放入 6×6 的方格表，共占 18 格，四邊形 $PRQO$ 占 1 格，故面積為 1/18

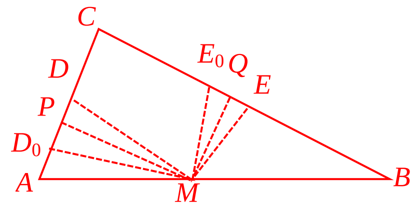
3. 如圖△ABC 中，∠A=60°、∠B=30°，將△ABC 繞 AB 邊中點 M 順時針旋轉 20°至△$A'B'C'$，設 AC 與 $A'C'$交於點 D，BC 與 $B'C'$交於點 E，那麼∠DME 的角度為（　　）。



A. 60°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 150°

答案：B

解答：設 D 與 E 分別由 D_0 與 E_0 旋轉而得；



則 $MD_0=MD$，$ME_0=ME$，且∠D_0MD=∠E_0ME=20°

作等腰△D_0MD、△E_0ME 的高 MP、MQ；

則 $MP\perp AC$，$MQ\perp BC$，故∠PMQ=90°

又∠D_0MP=∠DMP=∠E_0MQ=∠EMQ=10°，易知∠DME=∠PMQ

4. 若 $\frac{a-b}{\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}}$ 有意義，則此代數式可化簡為（　　）。

A. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$　　B. $\sqrt{-a}-\sqrt{-b}$　　C. $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$　　D. $\sqrt{-b}-\sqrt{-a}$

答案：D

解答：∵ $\sqrt{ab}$ 有意義　　∴a，b 符號相同（即同正負）

1. 若 $a\ge0$ 且 $b\ge0$，則 $2\sqrt{ab}-a-b=-(-2\sqrt{ab}+\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2)=-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\le0$

則 $\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}}$ 無意義

2. 若 $a<0$ 且 $b<0$，則 $\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}=\sqrt{\sqrt{-a}^2+\sqrt{-b}^2+2\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}}=\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$

原式=$\frac{-(\sqrt{-a}^2-\sqrt{-b}^2)}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}}=\sqrt{-b}-\sqrt{-a}$

5. “$\frac{7}{8\times9}\times2^6+\frac{8}{9\times10}\times2^7+\cdots+\frac{13}{14\times15}\times2^{12}+\frac{14}{15\times16}\times2^{13}$” 計算結果為（　　）。

A. 整數　　B. 有限小數　　C. 無限循環小數　　D. 無理數

答案：A

解答：$\frac{n}{(n+1)\times(n+2)}\times2^{n-1}=\frac{2(n+1)-(n+2)}{(n+1)\times(n+2)}\times2^{n-1}=(\frac{2}{n+2}-\frac{1}{n+1})\times2^{n-1}=\frac{2^n}{n+2}-\frac{2^{n-1}}{n+1}$

原式=$\frac{2^7}{9}-\frac{2^6}{8}+\frac{2^8}{10}-\frac{2^7}{9}+\cdots+\frac{2^{13}}{15}-\frac{2^{12}}{14}+\frac{2^{14}}{16}-\frac{2^{13}}{15}=\frac{2^{14}}{16}-\frac{2^6}{8}$

=1024–8=1016

6. 任作凸 n 邊形，以各邊為直徑各作一個圓，該凸 n 邊形總能被這 n 個圓（包括圓周及其內部區域）所覆蓋，則 n 的最大值為（　　）。 A. 3　B. 4　C. 5　D. 6

答案：B

解答：對於任意凸 4 邊形的內部一點 P，它關於 4 邊的張角總和為 360°，
所以必有至少一個角≥90°，則 P 被對應邊為直徑的圓所覆蓋，
同理，易見正 5 邊形的中心關於所有邊的張角都是 72°<90°，
故中心不會被任一個圓覆蓋

7. 將函數 $y=\dfrac{a-x}{x-a-1}$ 的圖象以直線 $y=x$ 為軸作軸對稱變換，已知得到的圖像是一個中心對稱圖形且對稱中心為 $M(m,3)$，則 a^m=（　　）。 A. $\dfrac{1}{2}$　B. 2　C. –2　D. –4

答案：A

解答：化簡得 $y=-1-\dfrac{1}{x-a-1}$，即函數 $y=-\dfrac{1}{x}$ 右移 a+1 單位，下移 1 單位
故對稱中心為(a+1,–1)
再將此對稱中心變換至 M，即為 a+1=3，m=–1，∴$a^m=2^{-1}$

8. 已知拋物線 $y=ax^2$ 與其關於點(1,1)中心對稱的曲線恰有兩個不同的交點 A 和 B，若 A、B 所在直線與 x 軸正半軸夾角為 45°，那麼實數 a=（　　）。

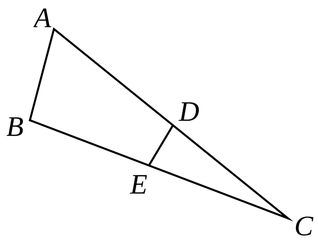
A. 2　　B. –2　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

答案：C

解答：（1）A、B 為對稱點，即關於(1,1)對稱，故直線 AB 過點(1,1)，
故直線 AB：$y=x$
（2）$y=ax^2$ 與 $y=x$ 的交點為(0,0)和($\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{a}$)，
故(0,0)與($\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{a}$)關於點(1,1)對稱；∴ $\dfrac{1}{a}$=2

二、填空題（每小題 5 分，共 40 分）

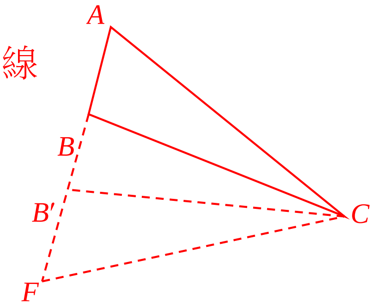
9. Refer$\triangle ABC$ at the right, E is the midpoint of BC, D lie on AC with $\angle BAC$=60°, $\angle ACB$=20°, $\angle DEC$=80°, $S_{\triangle ABC}+2S_{\triangle CDE}=\sqrt{3}$, What is the length of AC ?________.



答案：$2\sqrt{2}$

翻譯：如圖，在△ABC 中，E 是 BC 中點，D 是 AC 上一點，且$\angle BAC=60°$，$\angle ACB=20°$，$\angle DEC=80°$，$S_{\triangle ABC}+2S_{\triangle CDE}=\sqrt{3}$，則 AC 的長為________。

解答：易知$\angle ACB=20^\circ$，$\angle DEC=80^\circ$，$\angle EDC=80^\circ$，$CD=CE$



將△ABC 補成等邊△AFC，易見 CB 為$\angle ACF$ 的三等分線

作另一條三等分線 CB'，可見△CDE∽△CBB'

且相似比$=CD:CB=1:2$

$\therefore S_{\triangle AFC}=2S_{\triangle ABC}+S_{\triangle CBB'}=2S_{\triangle ABC}+4S_{\triangle CDE}=2\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AC^2$

$\therefore AC^2=8$，$AC=2\sqrt{2}$

10. 關於 x 的二次不等式 $x^2-2x+(2a-4)<0$ 僅有一個整數解，且係數 a 也是整數，那麼 $a=$________。

答案：2

解答：整理得 $a<-\dfrac{1}{2}x^2+x+2$，函數 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x+2=-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{5}{2}$

$\therefore f(x)$的最大值為 $f(1)=\dfrac{5}{2}$，且在 x 取整數值時，函數次大值是 $f(0)=f(2)=2$

由題目條件知僅有一個整數滿足 $f(x)>a$，這個整數 x 只能是 $x=1$；

$\therefore a$ 的取值範圍是 $2\le a<\dfrac{5}{2}$，故 $a=2$

11. Determine all the solution of $\begin{cases}x(x+1)(3x+y)=144\\ x^2+4x+y=24\end{cases}$. ________.

答案：$\begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}$或$\begin{cases}x=-4\\ y=24\end{cases}$

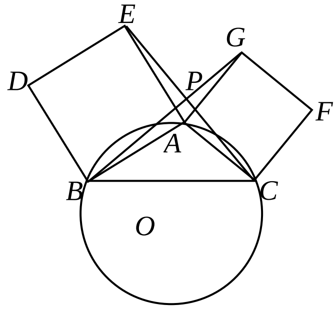
翻譯：解方程組$\begin{cases}x(x+1)(3x+y)=144\\ x^2+4x+y=24\end{cases}$，寫出所有解________。

解答：令$\begin{cases}a=x^2+x\\ b=3x+y\end{cases}$，則原方程組變為$\begin{cases}ab=144\\ a+b=24\end{cases}$；

由二次方程的韋達定理解得 $a=b=12$，

即$\begin{cases}x^2+x=12\\ 3x+y=12\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}$或$\begin{cases}x=-4\\ y=24\end{cases}$

12. 如圖，A、B、C 為圓 O 上三個點，$BC=10$ 為固定邊，A 為動點，且保持$\angle BAC=120^{\circ}$，以$\triangle ABC$ 的邊 AB，AC 為邊向三角形外作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$，設 BG、CE 交於點 P，則 OP 的最大值為________。



答案：$5+\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$

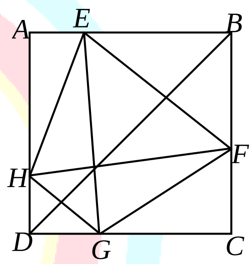
解答：設$\triangle ACE$ 繞 A 點逆時針轉 $90°$可與$\triangle AHB$ 重合

$\therefore CE=HB$ 且 $CE\perp HB$；$\therefore \angle BPC=90°$，令 M 為 BC 中點，則 $MP=\dfrac{1}{2}BC=5$；

由外心性質知$\triangle OBC$ 為以 $BC=10$ 為底邊的等腰三角形，$\angle BOC=120°$

$\therefore MO=\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$ ；$\therefore OP\le MO+MP=5+\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$

13. 如圖 E、F、G、H 分別是正方形 $ABCD$ 四邊 AB、BC、CD、DA 上的點，且 EG、FH、BD 三線共點，線段 AE、BE、BF、CF、CG、DG、DH、AH 的長度都是整數公分，又知 $S_{\triangle AEH}=3\text{cm}^2$，$S_{\triangle DGH}=6\text{cm}^2$，$S_{\triangle BEF}=24\text{cm}^2$，那麼則 $S_{四邊形 EFGH}=$________cm^2。



答案：40.5

解答：（1）由 EG，FH，BD 三線共點；知 $\dfrac{BE}{DG}=\dfrac{BF}{DH}=\sqrt{\dfrac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle DGH}}}=2$

（2）設 $DH=x$，$DG=y$，正方形邊長為 a；

$(a-x)(a-2y)=2S_{\triangle AEH}=6$，$xy=2S_{\triangle DGH}=12$，解得 $x=3$，$y=4$，$a=9$

$\therefore S_{四邊形 EFGH}=9^2-3-6-24-\dfrac{1}{2}(9-2\times 3)(9-4)=40.5$

14. 設實數 x、y 滿足 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$，且 $y\neq 0$，則代數式 $\dfrac{x+1}{y}$ 的最小值是______。

答案：$\dfrac{3}{4}$

解答：設 $\dfrac{x+1}{y}=k$ ，則 $x=ky-1$

代入題中方程：$(ky-1)^2+y^2-2(ky-1)-2y+1=0$，$(k^2+1)y^2-(4k+2)y+4=0$

$\therefore \triangle\ge 0$，即$(4k+2)^2-16(k^2+1)\ge 0$，得 $k\ge\dfrac{3}{4}$

15\. 已知不等式 $a \le \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4 \le b$ 的解集是 $\{a \le x \le b\}$（其中 $a<b$）則 $b=$______。

答案：4

解答：二次函數 $f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+4=\frac{3}{4}(x-2)^2+1$ 的圖像頂點為(2,1)，

對稱軸為 $x=2$，開口向上；

若 $a> f_{\min}=f(2)=1$，則

$a \le \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4 \le b$ 的解集為兩個關於 $x=2$ 對稱的區間；

故 $a\le1$，且 a、b 關於 $x=2$ 對稱，且 $f(a)=f(b)=b\ge3$；

解方程 $\frac{3}{4}b^2-3b+4=b$，得 $b_1=4$，$b_2=\frac{4}{3}$（捨去）

16\. 已知等腰梯形的最長邊長為 13cm，周長為 28cm，面積為 27cm^2，則它的最短邊長為______cm。

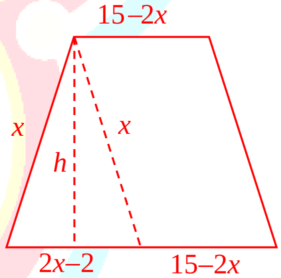
答案：5

解答：（1）若最大的邊為腰，則上下底分別為 a、b，則 $a+b=2$

兩個這樣的梯形可拼成一個邊長為 2 和 13 的平行四邊形，

其面積最大為 $2\times13<27+27$

（2）下底為 13，設腰長為 x，高 h，如圖



則上底為 $15-2x$，高 $h=\sqrt{x^2-(x-1)^2}=\sqrt{2x-1}$

故 $\frac{1}{2}\times(28-2x)\times\sqrt{2x-1}=27$

令 $y=\sqrt{2x-1}$，即 $\frac{1}{2}y(27-y^2)=27$，$y^3-27y+54=0$

可化為 $(y+6)(y-3)^2=0$

得 $y=3$ 或 $y=-6$（捨去），代入得 $x=5$，滿足題目要求

三、簡答題（每小題 10 分，共 20 分，請簡要寫出解答過程）

17. 對於正整數 n，定義 $f(n)$為 $3n^2+n+1$的十進位表示的數碼和，

（1）求 $f(n)$能取得的最小可能值；

（2）找到正整數 n，使 $f(n)=2015$

答案：8，$10^{224}-6$

解答：（1）$3n^2+n+1=n(3n+1)+1\equiv n(n+1)+1\equiv 1 \pmod 2$

若 $f(n)=1$ 則 $3n^2+n+1=1$，$n=0$，矛盾；

若 $f(n)=2$ 則 $3n^2+n+1$必形如 $\overline{10\cdots01}$，$3n^2+n+1=10^k+1$；

則 $3n^2+n=10^k=n(3n+1)$，無解；

若 $f(n)=3$ 則 $3n^2+n+1$可以形如 $\overline{20\cdots01}$，$3n^2+n+1=2\times 10^k+1$，

當 $n=8$ 時，$3n^2+n+1=201\Rightarrow f_{(8)}=3$，故最小值為 3

（2）令 $n=10^k-6$

則 $3n^2+n+1=3(10^k-6)^2+(10^k-6)+1=3\times 10^{2k}-36\times 10^k+108+10^k-6+1$

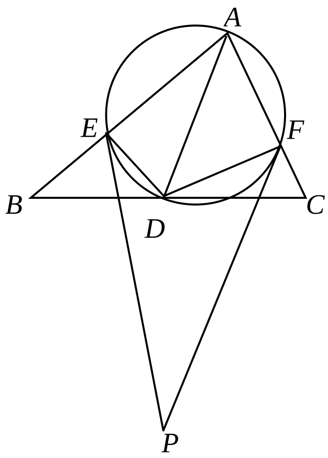
$=3\times 10^{2k}-35\times 10^k+103$

故當 $k\geq 3$ 時，$3n^2+n+1$ 的十進位表示為 $\overline{2\underbrace{99\cdots 9}_{k-2}65\underbrace{0\cdots 0}_{k-3}103}$

$f(10^k-6)=9k-1$（$k\geq 3$），

當 $k=224$ 時，$n=10^{224}-6$ 時，$f(n)=2015$

18. 如圖，以△ABC 的中線 AD 為直徑作圓 O，分別交 AB、AC 於點 E、F，設圓 O 在 E、F 處的切線交於點 P，求證 $PD\perp BC$。



證明：取 BD、CD 的中點 M、N；

連接 ME、MP、NF、NP；

$\because \angle DEA=\angle DFA=90°$

$\therefore ME=MB=MD=\dfrac{1}{4}BC=NF=ND=NC$；

又 $\angle PEM=\angle DEM-\angle DEP=\angle EDM-\angle 1=90°-\angle B-\angle 1$；

$\angle PFN=\angle DFP-\angle DFN=\angle 2-\angle FDN=\angle 2+\angle C-90°$；

$\therefore \angle PEM-\angle PFN=180°-\angle B-\angle C-\angle 1-\angle 2=0°$；

$\therefore \angle PEM=\angle PFN$

又 $PE=PF$

$\therefore$ △$PME\cong$△PNF（SAS）

$\therefore PM=PN$

又 D 為 MN 中點

$\therefore PD\perp MN$ 即 $PD\perp BC$