2015年第11屆IMC國際數學競賽(新加坡)

Eleventh IMC International Mathematics Contest (singapore), 2015

國中二年級 決賽試題解答

◎ 第1-16題請將答案填寫在下面答案表內！

◎ 第17-18題需在試題空白處寫出計算過程，否則不予計分！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案	C	B	A	B	C	A	A	A
填空題	9	10	11	12	13	14	15	16
答 案	1260	27	4094	2	0	22	81	20

一、選擇題（每小題 5 分，共 **40** 分）

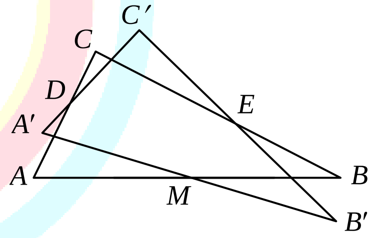
1. “$20\frac{1}{15}\times15\frac{1}{20}\times12\frac{1}{50}$”計算結果的整數部分為（　　）。

A. 3601　　B. 3612　　C.3630　　D. 3631

答案：C

解答：整數部分$=20\times15\times12+\frac{20\times15}{50}+\frac{15\times12}{15}+\frac{20\times12}{20}=3630$

2. 如圖△ABC 中，$\angle A=60°$、$\angle B=30°$，將△ABC 繞 AB 邊中點 M 順時針旋轉 20°至△$A'B'C'$，設 AC 與 $A'C'$交於點 D，BC 與 $B'C'$交於點 E，那麼$\angle DME$ 的角度為（　　）。



A. 60°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 150°

答案：B

解答：設 D 與 E 分別由 D_0 與 E_0 旋轉而得

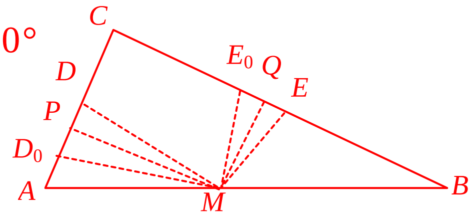
則 $MD_0=MD$，$ME_0=ME$，且$\angle D_0MD=\angle E_0ME=20°$

作等腰△D_0MD、△E_0ME 的高 MP、MQ

則 $MP\perp AC$，$MQ\perp BC$，故$\angle PMQ=90°$

又$\angle D_0MP=\angle DMP=\angle E_0MQ=\angle EMQ=10°$

易知$\angle DME=\angle PMQ$



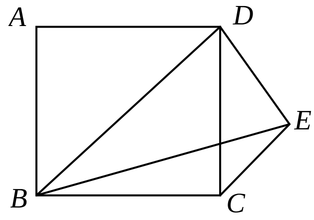
3. 桌上放著六張牌全部正面朝下，已知其中恰有兩張 K，現隨機翻開兩張牌，“至少翻出一張 K”與“翻出兩張都不是 K”的機率相比（　　）。

A. 前者大　　B. 後者大　　C. 二者一樣大　　D. 無法比較

答案：A

解答：設前者機率 P_1，後者機率 P_2，$P_1+P_2=1$，$P_2=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$，$P_1=1-P_2=\frac{3}{5}>P_2$

4. Quadrilateral *ABCD* at the right is a square with area of 1square unit（單位正方形） such that $BD=BE$，$CE\,//\,BD$.What s the length of *CE* ?



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

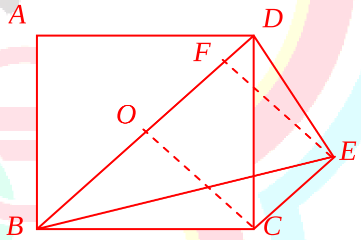
答案：B

翻譯：如圖 *ABCD* 為單位正方形，$BD=BE$，$CE//BD$，則 *CE* 長為（　　）。

解答：作 $CO\perp BD$ 於 O，$EF\perp BD$ 於 F，則 O 為正方形 *ABCD* 的中心，

易知四邊形 *CEFO* 為矩形，又 $BE=BD=\sqrt{2}$，$BO=CO=EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$

知 Rt△*BEF* 的三內角為 30°、60°、90°



$\therefore BF=\frac{\sqrt{3}}{2}BE=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore CE=OF=BF-OB=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

5. 將一個正整數表示為 3 的不同非負整數冪相加減的形式（每個整數冪算一項），例如 $15=3^3-3^2-3$（共有3項），那麼 2015 寫成上述類似形式會出現（　　）項。

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 5

答案：C

解答：2015=2187–243+81–9–1

6. 函數 $y=\frac{a-x}{x-a-1}$ 的圖像是一個中心對稱圖形，對稱中心為 $M(4,b)$，則 $a+b=$(　　)。

A. 2　　B. 3　　C. –2　　D. –4

答案：A

解答：化簡得 $y=-1-\frac{1}{x-a-1}$ 為函數 $y=-\frac{1}{x}$ 右移 $a+1$ 單位，下移 1 單位

故對稱中心為$(a+1,-1)$，$a+1=4$，$b=-1$，$a+b=2$

7. 設 $A=(5\sqrt{2}+7)^{2015}$，其小數部分為 B，則 $A\cdot B$ 的值為（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

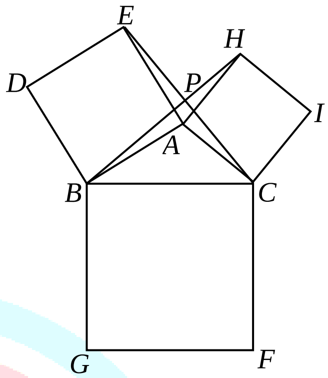
答案：A

解答：由 $0<5\sqrt{2}-7=\sqrt{50}-\sqrt{49}<1$，知 $0<(5\sqrt{2}-7)^{2015}<1$；

又易知 $(5\sqrt{2}+7)^{2015}-(5\sqrt{2}-7)^{2015}$ 為整數，故 $B=(5\sqrt{2}-7)^{2015}$；

$A\cdot B=(7+5\sqrt{2})^{2015}(5\sqrt{2}-7)^{2015}=1$

8. 如圖△ABC 中，∠BAC=120°，BC=10，分別以邊 AB、BC、AC 為邊向三角形外作正方形 $ABDE$、$BCFG$、$CAHI$，設 CE、BH 交於點 P，正方形 $BCFG$ 的中心為 O，則 OP 的最大值為（　　）。　A. 10　B. $5+4\sqrt{3}$　C. $5+4\sqrt{2}$　D. 8



答案：A

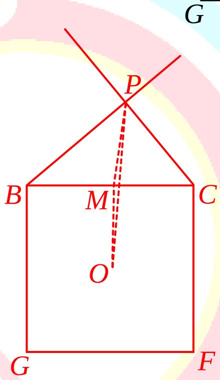
解答：設△ACE 繞 A 點逆時針轉 90°可與△AHB 重合

∴$CE=HB$ 且 $CE\perp HB$；∴∠BPC=90°

令 M 為 BC 中點，則 $MP=\frac{1}{2}BC=5$，

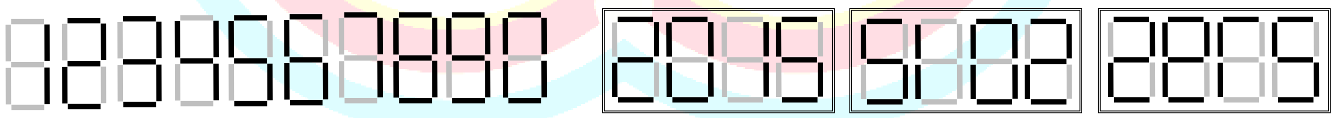
又 MO=5；∴$OP\le MO+MP$=10

∴當△ABC 為等腰三角形時達到最大值



二、填空題（每小題 5 分，共 40 分）

9. 一種液晶螢幕恰好可以顯示 4 個數字，每個數字均由 2~7 條線段組成（如圖）。當旋轉觀看時有些顯示沒有意義，有些顯示不變，還有些顯示成另一個數，那麼旋轉後可以正常顯示成另一個數的共有______個。（正常顯示必須嚴格符合圖例給出的正確樣式）



數字顯示正確樣式　　正確　　錯誤　　錯誤

答案：1260

解答：中心旋轉有意義的，只能含 0、2、5、6、8、9，共 6^4

排除自身中心對稱的 6^2（只選千位和百位即可），$6^4-6^2=36\times35=1260$ 種

10. In an isosceles trapezoid（等腰梯形）, the longest side is 13cm, the shortest side is 5cm, and the perimeter（周長）is 28cm. Determine the area of this trapezoid in cm^2? ______.

答案：27

翻譯：已知等腰梯形的最長邊長為 13cm，最短邊長為 5cm，周長為 28cm，則它的面積為多少平方公分?

解答：（1）28=5+5+5+13，故上底 5，下底 13，腰長為 5

（2）高=$\sqrt{5^2-(\frac{13-5}{2})^2}=3$，故 $S=\frac{13+5}{2}\times 3=27$

11. Compute: $\frac{1}{2\times 3}\times 2^2+\frac{2}{3\times 4}\times 2^3+\frac{3}{4\times 5}\times 2^4+\cdots+\frac{13}{14\times 15}\times 2^{14}+\frac{14}{15\times 16}\times 2^{15}=$________.

答案：4094

解答：$\frac{n}{(n+1)\times(n+2)}\times 2^{n+1}=\frac{2(n+1)-(n+2)}{(n+1)\times(n+2)}\times 2^{n+1}=\frac{2^{n+2}}{n+2}-\frac{2^{n+1}}{n+1}$

原式$=\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}+\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3}+\frac{2^5}{5}-\frac{2^4}{4}+\cdots+\frac{2^{15}}{15}-\frac{2^{14}}{14}+\frac{2^{16}}{16}-\frac{2^{15}}{15}=\frac{2^{16}}{16}-\frac{2^2}{2}$

$=4096-2=4094$

12. 滿足 $a+\frac{10b}{a^2+b^2}=5$，$b+\frac{10a}{a^2+b^2}=4$ 的正整數對(a, b)共______組。

答案：2

解答：由已知條件可以推出 $\begin{cases}\frac{10b}{a^2+b^2}=5-a & ① \\ \frac{10a}{a^2+b^2}=4-b & ②\end{cases}$

由①×b+②×a 得 $10=(5-a)b+(4-b)a$，$2ab-5b-4a+10=0$，$(2a-5)(b-2)=0$

得 $b=2$，代入②得 $5a=a^2+4$，$a=1$ 或 4

$(1, 2)$和$(4, 2)$為原方程組的兩組整數解

13. 已知分式 $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}=\frac{a_1}{x+1}+\frac{a_2}{x+2}+..+\frac{a_5}{x+5}$（其中 a_1、…、a_5 為常數），等式右邊稱為等式左邊的部分分式形式，則 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=$_______。

答案：0

解答：兩邊同時乘以 $(x+1)(x+2)\cdots(x+5)$ 變為整式恆等式

再將整式中的 x 用 $x=-k$ 分別代入 $(k=1、2、\cdots、5)$

則 $a_1=\frac{1}{0!\times 4!}$，$a_2=-\frac{1}{1!\times 3!}$，$a_3=\frac{1}{2!\times 2!}$，$a_4=-\frac{1}{3!\times 1!}$，$a_5=\frac{1}{4!\times 0!}$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$

14. 已知 5 個正整數 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ 滿足 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \le 2015$，則 $x_3 - x_2$ 的最大值是______。

答案：22

解答：顯然應使 x_1，x_2 盡可能小，x_3 盡可能大

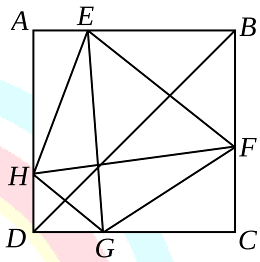
$x_1 \ge 1$，$x_2 \ge 2$，$x_4 \ge x_3+1$，$x_5 \ge x_3+2$

$\therefore 2015 \ge x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \ge (x_3+2)^2 + (x_3+1)^2 + x_3^2 + 2^2 + 1^2$

即 $3(x_3+1)^2 \le 2008$，$x_3+1 \le 25$，$x_3 \le 24$

$\therefore x_3 - x_2 \le 22$

15. 如圖 E、F、G、H 分別是正方形 $ABCD$ 四邊 AB、BC、CD、DA 上的點，且 EG、FH、BD 三線共點，線段 AE、BE、BF、CF、CG、DG、DH、AH 的長度都是整數公分，又知 $S_{\triangle AEH}=3\text{cm}^2$，$S_{\triangle DGH}=6\text{cm}^2$，$S_{\triangle BEF}=24\text{cm}^2$，那麼則 $S_{\text{正方形}ABCD}=$________cm^2。



答案：81

解答：（1）由 EG，FH，BD 三線共點，知 $\dfrac{BE}{DG} = \dfrac{BF}{DH} = \sqrt{\dfrac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle DGH}}} = 2$

（2）設 $DH=x$，$DG=y$，正方形邊長為 a

$(a-x)(a-2y)=2S_{\triangle AEH}=6$，$xy=S_{\triangle DGH}=12$

解得 $x=3$，$y=4$，$a=9$

$\therefore S_{\text{正方形}ABCD}=9^2=81$

16. 解方程組：$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-1}\times\sqrt{y-2}\times\sqrt{z-3}}{|x-1|+|y-2|} = \dfrac{6}{13} \\ \dfrac{\sqrt{x-1}\times\sqrt{y-2}\times\sqrt{z-3}}{|z-3|+|y-2|} = \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{\sqrt{x-1}\times\sqrt{y-2}\times\sqrt{z-3}}{|x-1|+|z-3|} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$，$x+y+z=$______。

答案：20

解答：方程組中每個方程兩邊取倒數得：

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{y-2}\times\sqrt{z-3}}+\dfrac{\sqrt{y-2}}{\sqrt{x-1}\times\sqrt{z-3}}=\dfrac{13}{6}\\ \dfrac{\sqrt{y-2}}{\sqrt{x-1}\times\sqrt{z-3}}+\dfrac{\sqrt{z-3}}{\sqrt{x-1}\times\sqrt{y-2}}=\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{\sqrt{z-3}}{\sqrt{y-2}\times\sqrt{x-1}}+\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{y-2}\times\sqrt{z-3}}=\dfrac{5}{3}\end{cases}$$，解得 $$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{y-2}\times\sqrt{z-3}}=\dfrac{9}{6}\cdots①\\ \dfrac{\sqrt{y-2}}{\sqrt{x-1}\times\sqrt{z-3}}=\dfrac{4}{6}\cdots②\\ \dfrac{\sqrt{z-3}}{\sqrt{x-1}\times\sqrt{y-2}}=\dfrac{1}{6}\cdots③\end{cases}$$

三式相乘得 $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}\times\sqrt{y-2}\times\sqrt{z-3}}=\dfrac{1}{6}\cdots④$

①÷④得 $x-1=9$，②÷④得 $y-2=4$，③÷④得 $z-3=1$

故 $x+y+z=20$

三、簡答題（每小題 10 分，共 20 分，請簡要寫出解答過程）

17. “*” 是在全體實數上定義的二元運算，滿足如下恆等式：

（1）$a*a=a$　　（2）$(ka)*(kb)=k\cdot(a*b)$

（3）$(a_1+a_2)*(b_1+b_2)=(a_1+2b_1)*(\frac{1}{2}a_2+b_2)$　　（4）$a*b=b*(\frac{a+b}{2})$

以上恆等式對任意實數 a、b、k、a_1、a_2、b_1、b_2 都成立，求 $2015*(-2014)$。

答案：-671

解答：對於任意給定的實數 x、y，

方程組 $\begin{cases}a_1+a_2=x\\ b_1+b_2=y\\ a_1+2b_1=\dfrac{1}{2}a_2+b_2\end{cases}$

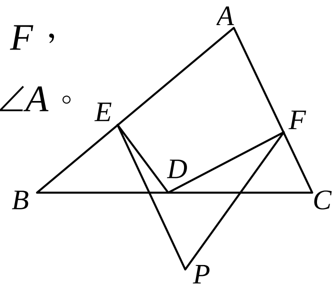
有解如 $\begin{cases}a_1=\dfrac{x+2y}{3}\\ a_2=\dfrac{2x-2y}{3}\\ b_1=0\\ b_2=y\end{cases}$，

將上述解代入恆等式（3）得 $x*y=\left(\dfrac{x+2y}{3}\right)*\left(\dfrac{x+2y}{3}\right)=\dfrac{x+2y}{3}$

可驗證：按上式定義*運算滿足題中 4 條性質，

故 $2015*(-2014)=\dfrac{2015-4028}{3}=-671$

18. 如圖 D 為△ABC 的 BC 邊中點，$DE \perp AB$ 於點 E，$DF \perp AC$ 於點 F，設 EF 的中垂線與 BC 的中垂線交於點 P，求證∠PED+∠PFD=∠A。



證明：取 BD 的中點 M 及 CD 的中點 N；

連接 ME、MP、NF、NP；

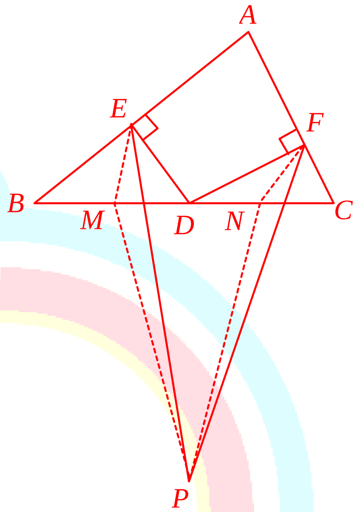
在△PME 與△PNF 中

$PE=PF$（P 在 EF 的中垂線上）

$PM=PN$（P 在 MN 的中垂線上）

又 ME、NF 分別為 $\mathrm{Rt}_{\triangle BED}$ 與 $\mathrm{Rt}_{\triangle CFD}$ 斜邊的中線

故 $ME=NF=\dfrac{BC}{4}$；



∴△PME≌△PNF（SSS）

∴∠PEM=∠PFN

$\angle PED+\angle PFD=\angle PED+(\angle NFD+\angle PFN)$

$=(\angle PED+\angle PFN)+\angle DFN$

$=(\angle PED+\angle PEM)+\angle DFN$

$=\angle DEM+\angle DFN$

$=\angle EDM+\angle FDN$

$=(90°-\angle B)+(90°-\angle C)$

$=\angle A$