2015年第11屆IMC國際數學競賽(新加坡)
Eleventh IMC International Mathematics Contest (singapore), 2015

國中一年級 決賽試題解答

◎ 第1-16題請將答案填寫在下面答案表內！

◎ 第17-18題需在試題空白處寫出計算過程，否則不予計分！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案	C	C	C	D	C	C	B	C
填空題	9	10	11	12	13	14	15	16
答 案	$\underbrace{1010\cdots10}_{20位数}$	$-\frac{1}{25}$	1−2+32−64 +2048	22	4	4094	$\frac{3\times2^{2014}+2\times3^{2014}}{5}$	225

一、選擇題（每小題 5 分，共 40 分）

1. 方程$|x-20|+|x+15|=2015$ 的兩個解為 x_1 和 x_2，那麼 $x_1+x_2=$（　　）。

A. 2015　　B. 1010　　C. 5　　D. −5

答案：C

解答：設 $x_1>x_2$，則$2x_1-5=2015$，$2x_2-5=-2015$，$x_1+x_2=5$

2. What is the integer（整數部分）of the final result of $20\frac{1}{15}\times15\frac{1}{20}\times12\frac{1}{50}$?

A. 3601　　B. 3612　　C. 3630　　D. 3631

答案：C

翻譯："$20\frac{1}{15}\times15\frac{1}{20}\times12\frac{1}{50}$"計算結果的整數部分為（　　）。

解答：整數部分$=20\times15\times12+\frac{20\times15}{50}+\frac{15\times12}{15}+\frac{20\times12}{20}=3630$

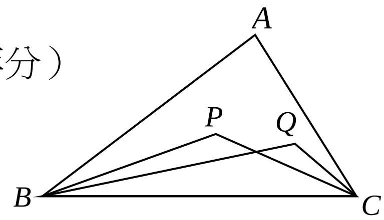
3. 同時含有字母 a、b、c、d、e 且系數為 1 的 2015 次單項式有（　　）個。

A. C_{2014}^{5}　　B. C_{2015}^{5}　　C. C_{2014}^{4}　　D. C_{2015}^{4}

答案：C

解答：相當於在 2015 個 1 之間放入 4 個 "+"

4. Refer to the figure △ABC at the right. BP and BQ trisect（三等分）interior ∠ABC while CP and CQ trisect ∠ACB，Given that ∠P=100° and ∠Q=130°, what is the size of ∠A?



A. 115°　　B. 80°　　C. 65°　　D. 50°

答案：D

翻譯：如圖△ABC 中，BP、BQ 是內角∠ABC 的三等分線，CP、CQ 是角∠ACB 的三等分線，已知∠P=100°、∠Q=130°, 則∠A 為（　　）。

解答：設∠ABC=3x°，∠ACB=3y°；∠P+∠Q=360−3x−3y，∠A=180°−3x−3y；
∠A=∠P+∠Q−180°=230°−180°=50°

5. 記 $A=\dfrac{1}{0^3+1^3+2^3-3\times0\times1\times2}+\dfrac{1}{1^3+2^3+3^3-3\times1\times2\times3}+\dots+\dfrac{1}{2014^3+2015^3+2016^3-3\times2014\times2015\times2016}$，$B=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{2015}$，則以下命題正確的是（　　）。

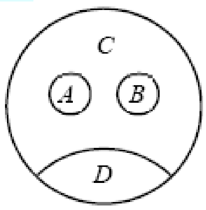
A. $B-A$ 是整數　　B. $B+A$ 是整數　　C. $B\div A$ 是整數　　D. $A\div B$ 是整數

答案：C

解答：$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3-3(n-1)n(n+1)=3n\times\dfrac{1^2+1^2+2^2}{2}=9n$

$\therefore A=\dfrac{1}{9}(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dots+\dfrac{1}{2015})$，$B=9A$；$\therefore B\div A=9$ 為整數

6. 如右圖所示，一個簡單臉譜由 A、B、C、D 四塊區域組成，現用紅、藍、黑三種顏色對這四塊區域染色，要求有公共邊界的相鄰區域要用不同顏色區分開，兩只“眼睛”A、B 同色的機率與不同色的機率相比（　　）。



A. 異色的機率大　　B. 同色的機率大　　C. 一樣大　　D. 無法比較

答案：C

解答：$P_{同色}=\dfrac{C_3^1\times2\times2}{3\times2\times2\times2}=\dfrac{1}{2}$，故 $P_{異色}=P_{同色}=\dfrac{1}{2}$

7. 一個凸 n 邊形，每個內角的角度互不相同，且均為 30°的整數倍，那麼 n 最大是（　　）。　A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

答案：B

解答：內角只有 30°、60°、90°、120°、150°五種可能，
對應外角 150°、120°、90°、60°、30°，
150+120+90+60+30=450=360+90，最多為四邊形

8. 對於正整數 n，“$3n^2+n+1$”在十進制表示下的各位數碼之和最小為（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

答案：C

解答：$\because 3n^2+n+1=n(3n+1)+1\equiv n(n+1)+1\equiv 1(\bmod 2)$

若最小值為 1，則 $3n^2+n+1=1$，$n=0$，矛盾；

若最小值為 2，則 $3n^2+n+1$ 必形如 $\overline{10\cdots01}$，$3n^2+n+1=10^k+1$；

則 $3n^2+n=10^k=n(3n+1)$，無解；

若最小值為 3，則 $3n^2+n+1$ 可以形如 $\overline{20\cdots01}$，$3n^2+n+1=2\times10^k+1$，

當 $n=8$ 時，$3n^2+n+1=201$，故最小值為 3

二、填空題（每小題 5 分，共 40 分）

9. Given: $A=\underbrace{20202\cdots02}_{\text{(15-digit number)}}\times\underbrace{55\cdots55}_{\text{(20-digit number)}}$ and $B=\underbrace{22\cdots22}_{\text{(15-digit number)}}\times\underbrace{5050\cdots50}_{\text{(20-digit number)}}$，Determine

$|A-B|=$__________.

答案：$\underbrace{1010\cdots10}_{20位数}$

解答：原式$=\underbrace{22\cdots22}_{16位数}\times\underbrace{50505\cdots05}_{19位数}-\underbrace{22\cdots220}_{16位数}\times\underbrace{50505\cdots05}_{19位数}$

$=(\underbrace{22\cdots22}_{16位数}-\underbrace{22\cdots220}_{16位数})\times\underbrace{50505\cdots05}_{19位数}=2\times\underbrace{50505\cdots05}_{19位数}$

$=\underbrace{1010\cdots10}_{20位数}$

10. 已知分式 $\dfrac{1}{(x+15)(x+20)}=\dfrac{a}{x+15}+\dfrac{b}{x+20}$（其中 a、b 為常數），等式右邊稱為等式左邊的部分分式形式，則 $ab=$________。

答案：$-\dfrac{1}{25}$

解答：恆等式兩邊同時乘以 $(x+15)(x+20)$，變為整式恆等式 $a(x+20)+b(x+15)=1$

$a+b=0$，$20a+15b=1$，$a=\dfrac{1}{5}$，$b=-\dfrac{1}{5}$；$ab=-\dfrac{1}{25}$

11. 將 2015 寫成 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots$ 的形式，其中 $a_0<a_1<a_2<\cdots$，且都是 2 的次方（a_0 可以是 $1=2^0$），那麼 $2015=$________。

答案：$1-2+32-64+2048$

解答：$2015=2048-33=2048-64+31=2048-64+32-1=2048-64+32-2+1$

12. 已知 5 個正整數 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ 滿足 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \le 2015$，則 $x_3 - x_2$ 的最大值是______。

答案：22

解答：顯然應使 x_1，x_2 盡可能小，x_3 盡可能大；$x_1 \ge 1$，$x_2 \ge 2$，$x_4 \ge x_3+1$，$x_5 \ge x_3+2$

$\therefore 2015 \ge x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \ge (x_3+2)^2 + (x_3+1)^2 + x_3^2 + 2^2 + 1^2$

即 $3(x_3+1)^2 \le 2008$，$x_3+1 \le 25$，$x_3 \le 24$，$\therefore x_3 - x_2 \le 22$

13. 滿足 $a + \dfrac{6}{b} = 5$，$b + \dfrac{4}{a} = 4$ 的整數解為 a、b，那麼 $a+b=$______。

答案：4

解答：由已知條件可以推出 $\begin{cases} \dfrac{6}{b} = 5 - a & ① \\ \dfrac{4}{a} = 4 - b & ② \end{cases}$

由①×b+②×a 得 $10=(5-a)b+(4-b)a$，$2ab-5b-4a+10=0$，$(2a-5)(b-2)=0$

得 $b=2$，$a=2$，$a+b=4$；

14. 已知 $2\times(n+1)-(n+2)=n$，計算：$\dfrac{1}{2\times3}\times2^2 + \dfrac{2}{3\times4}\times2^3 + \dfrac{3}{4\times5}\times2^4 + \cdots + \dfrac{13}{14\times15}\times2^{14} + \dfrac{14}{15\times16}\times2^{15} =$__________。

答案：4094

解答：$\dfrac{n}{(n+1)\times(n+2)}\times2^{n+1} = \dfrac{2(n+1)-(n+2)}{(n+1)\times(n+2)}\times2^{n+1} = \dfrac{2^{n+2}}{n+2} - \dfrac{2^{n+1}}{n+1}$

原式$=\dfrac{2^3}{3} - \dfrac{2^2}{2} + \dfrac{2^4}{4} - \dfrac{2^3}{3} + \dfrac{2^5}{5} - \dfrac{2^4}{4} + \cdots + \dfrac{2^{15}}{15} - \dfrac{2^{14}}{14} + \dfrac{2^{16}}{16} - \dfrac{2^{15}}{15} = \dfrac{2^{16}}{16} - \dfrac{2^2}{2}$

$=4096-2=4094$

15. 如果多項式 $x^{2015} + x^{2014} + 2\times3^{2014}$ 除以 $x^2 + x - 6$ 的餘式是 $ax+b$，那麼 $a=$________。（可以用次方形式表達）

答案：$\dfrac{3\times2^{2014} + 2\times3^{2014}}{5}$

解答：記 $f(x)=x^{2015}+x^{2014}+2\times3^{2014}$，設 $f(x)=(x^2+x-6)\cdot g(x)+(ax+b)$；

兩邊代入 $x=-3$ 得　$0=f(-3)=-3a+b$

兩邊代入 $x=2$ 得　$3\times2^{2014}+2\times3^{2014}=2a+b$

解得 $a = \dfrac{3\times2^{2014} + 2\times3^{2014}}{5}$

16. IMC 組委會為某國代表團安排車輛，有大小兩種規格，小車承載量不到大車的一半，已知 1 輛大車和 1 輛小車共有 60 個乘客座位，1 輛大車和 2 輛小車只能乘載團員總數的三分之一。如果組委會共派出 7 輛車，恰好能承載全部團員，且恰好坐滿，那麼此國代表團共有_______名團員。

答案：225

解答：（1）小車座位≤19

（2）3 大 6 小可以坐滿，故 1 大 6 小，2 大 5 小，3 大 4 小都無法坐滿

（3）若“4 大 3 小”，則 1 大=3 小，大=45，小=15

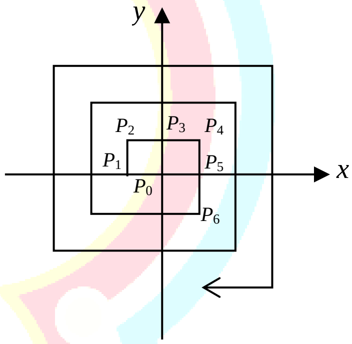
若“5 大 2 小”，則 2 大=4 小，大=40，小=20，不滿足條件

易知“6 大 1 小”與“7 大 0 小”更不滿足條件

故共 4×45+3×15=225 名

三、簡答題（每小題 10 分，共 20 分，請簡要寫出解答過程）

17. 如圖，從點 $P_0(0,0)$ 出發，每步長為 1，在格點中走出一條螺旋線，$P_1(-1,0)$、$P_2(-1,1)$、$P_3(0,1)$、$P_4(1,1)$、$P_5(1,0)$、$P_6(1,-1)$、⋯，請列舉螺旋線上前 4 個使得 $|x_n|+|y_n|=2015$ 的格點 P_n 坐標及其編號 n？



解答：由螺線生成規則容易找到的坐標規律是：

$P_{(2k)^2}$ 的坐標為(k,k)，

$P_{(2k+1)^2}$ 的坐標為$(-k-1,-k)$ $(k=0,1,2,\cdots)$

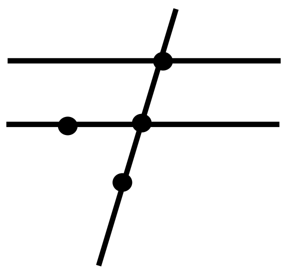
第一個滿足要求的格點 P_{2015^2} $(-1008,-1007)$，$n=4060225$

第二個滿足要求的格點為 P_{2015^2+2014} $(-1008,1007)$，$n=4062239$

第三個滿足要求的格點為 P_{2015^2+2016} $(-1007,1008)$ ，$n=4062241$

第四個滿足要求的格點為 P_{2016^2-1} $(1007,1008)$，$n=4064255$

18. 平面內有 N 個給定的點，如果能找到 k 條直線，它們分別恰好通過其中 1 個、2 個、⋯、k 個定點，當 $k=3$ 時如圖例，N 至少為 4，那麼 $k=5$ 時，N 至少為多少？給出一種構造。



答案：9

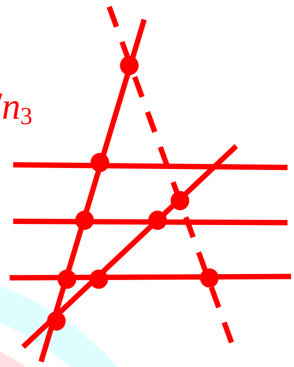
解答：（1）設直線 l_1 上恰有 5 個定點，

直線 l_2 上恰有 4 個定點，至少增加 3 個定點，

直線 l_3 上恰有 3 個定點，至少增加 1 個定點，

故 $N \geq 5+3+1=3^2=9$

（2）以下構造 $N=9$ 的實例：



構造 6 條直線：m_1、m_2、m_3 及 n_1、n_2、n_3 使 $n_1//n_2//n_3$

除此之外任兩條直線都相交且所有交點不重合；

選取下述交點作為定點：

m_1、m_2、m_3 之間所有的交點共 3 個；

n_1 與 m_1 的交點，n_2 與 m_1、m_2 的交點，n_3 與 m_1、m_2、m_3 的交點；

取定的交點共 3+(1+2+3)=9 個；

則 n_1 上恰好有 1 個定點，n_2 上恰好有 2 個定點，n_3 上恰好有 3 個定點；

m_1 上恰好有 2+3=5 個定點，m_2 上恰好有 2+2=4 個定點，m_3 不計