高中二年級 決賽試題解答

◎ 第1-16題請將答案填寫在下面答案表內！

◎ 第17-18題需在試題空白處寫出計算過程，否則不予計分！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案	C	B	D	A	A	D	B	D
填空題	9	10	11	12	13	14	15	16
答 案	1009	4	$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$-\dfrac{7}{10}$	12	7	±2015	2:1

一、選擇題（每小題 5 分，共 40 分）

1. 已知函數 $f(x)=\dfrac{a-x}{x-a-1}$，其反函數 $f^{-1}(x)$ 的圖像的對稱中心為點 $M(m,3)$，則 a^m 為（　　）。 A. 2　　B. –2　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

答案：C

解答： $f(x)=-1-\dfrac{1}{x-a-1}$ 的對稱中心為$(a+1,-1)$；

故$(-1,a+1)$為 $y=f^{-1}(x)$ 的圖像的對稱中心，$m=-1$，$a=2$

2. Let real numbers m、n、x and y satisfy $m^2+n^2=a$，$x^2+y^2=b$，where a , b are constants(正常數) and $a\neq b$，Determine the minimum value of $mx+ny$.

A. $-\dfrac{a+b}{2}$　　B. $-\sqrt{ab}$　　C. $-\dfrac{2ab}{a+b}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

答案：B

翻譯：設實數變量 m、n、x、y 滿足 $m^2+n^2=a$，$x^2+y^2=b$，其中 a、b 是正常數且 $a\neq b$，那麼 $mx+ny$ 的最小值是（　　）。

解答：由 *Cauchy* 不等式得：$(mx+ny)^2\le(m^2+n^2)(x^2+y^2)=ab$ ；$mx+ny\ge-\sqrt{ab}$ ，

容易構造當 $m=n=-\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ ，$x=y=\sqrt{\dfrac{b}{2}}$ 時可取到最小值

3. $\{F_n\}$表示常見的 *Fibonacci* 數列：$F_0=0$、$F_1=1$、$F_2=1$、$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$（n 為任意自然數），設 $G_n=\sum_{i=1}^{n}F_{2i}$，$H_n=\sum_{i=1}^{n}F_{2i-1}$，那麼 $G_{2015}-H_{2015}$ 的值為（　　）。

A. F_{2015}　　B. F_{4029}　　C. H_{2014}　　D. G_{2014}

答案：D

解答：$F_2=F_1$；$F_4=F_2+F_3$；…；$F_{2016}=F_{2014}+F_{2015}$；

$G_{2015}=F_2+F_4+F_6+\cdots+F_{4030}=F_0+F_1+F_2+F_3+\cdots+F_{4028}+F_{4029}$；

$H_{2015}=F_1+F_3+F_5+\cdots+F_{4029}=F_1+F_1+F_2+F_3+F_4+\cdots+F_{4027}+F_{4028}$；

$G_{2015}-H_{2015}=F_0+F_2+F_4+F_6+\cdots+F_{4028}=G_{2014}=F_{4029}-F_1$

4. 在平面α中，△ABC 與△$A'B'C'$關於直線 m 對稱（且兩三角形分居直線 m 的兩側），現將α沿直線 m 折成直二面角，則由 A、B、C、A'、B'、C'六個點所能確定的平面個數為（　　）。　A. 11　　B. 14　　C. 17　　D. 20

答案：A

解答：由對稱性可得直線 $AA'//BB'//CC'$；

三點確定一平面，六個點中有 $C_6^3=20$ 個三點組；

其中 (A,A',B,B') 、(A,A',C,C') 、(B,B',C,C') 是僅有的四點共面情形，

故六個點確定的平面個數=$20-3\times(C_4^{\,3}-1)=11$ 個

5. 已知 $x_1=16$，$x_2=14$，$x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}^2-4}{x_n}$（$\forall n\geq 1$），則數列$\{x_n\}$的性質是（　　）。

A. 只有有限項，且對數列中連續三項，總有 $x_{n+2}=2x_{n+1}-x_n$

B. 有無窮多項，且對數列中連續三項，總有 $x_{n+2}=2x_{n+1}-x_n$

C. 只有有限項，且存在數列中連續三項，使 $x_{n+2}\neq 2x_{n+1}-x_n$

D. 有無窮多項，且存在數列中連續三項，使 $x_{n+2}\neq 2x_{n+1}-x_n$

答案：A

解答：$x_nx_{n+2}=x_{n+1}^2-4$，$x_{n+1}x_{n+3}=x_{n+2}^2-4$，兩式相減得 $x_nx_{n+2}-x_{n+1}x_{n+3}=x_{n+1}^2-x_{n+2}^2$

$\Leftrightarrow x_nx_{n+2}+x_{n+2}^2=x_{n+1}x_{n+3}+x_{n+1}^2 \quad \Leftrightarrow (x_n+x_{n+2})x_{n+2}=(x_{n+1}+x_{n+3})x_{n+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_{n+1}+x_{n+3}}{x_{n+2}}=\dfrac{x_n+x_{n+2}}{x_{n+1}}=\dfrac{x_1+x_3}{x_2}=2$，$\therefore x_{n+2}=2x_{n+1}-x_n$，

即$\{x_n\}$是公差為-2 的等差數列 $x_1=16$，$x_2=14$，$x_3=12$，…，$x_9=0$，$x_{10}=-2$；

遞推至第 11 項時 $x_{11}=\dfrac{{x_{10}}^2-4}{x_9}=\dfrac{(-2)^2-4}{0}$ 無意義，故數列只有 10 項

6. 在平面直角坐標行中，若方程 $m(x^2+y^2+2y+1)=(x-2y+3)^2$ 表示的曲線為橢圓，則實係數 m 的取值範圍是（　　）。 A. (0,1)　B. (1,+∞)　C. (0,5)　D. (5,+∞)

答案：D

解答：方程等價於 $\sqrt{m}\cdot\sqrt{x^2+(y+1)^2}=|x-2y+3|$，（$m$>0）

$\dfrac{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}{\dfrac{|x-2y+3|}{\sqrt{5}}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{m}}$，其中 $\sqrt{x^2+(y+1)^2}$ 是橢圓上的點(x,y)到焦點(0,–1)的距離；

$\dfrac{|x-2y+3|}{\sqrt{5}}$ 是點(x,y)到直線（準線）$x-2y+3=0$ 的距離；

故 $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{m}}=e\in(0,1)$，$m$>5

7. 集合 $A=\{1,2,\cdots,2015\}$，則定義在 A 上的單調遞增函數 $f:A\to A$（即 $\forall x,y\in A$，$x\le y$，有 $f(x)\le f(y)$）共有（　　）個。

A. C_{4030}^{2015}　B. C_{4029}^{2015}　C. C_{4028}^{2015}　D. C_{4028}^{2014}

答案：B

解答：$1\le f(1)\le f(2)\le\cdots\le f(2015)\le 2015$；$1\le f(1)<f(2)+1<f(3)+2<\cdots<f(2015)+2014\le 4029$；

從 1 至 4029 中任選 2015 個數，即 C_{4029}^{2015} 種方法

8. 已知拋物線 $y^2=ax$ 與其關於點(1,1)對稱的曲線恰有兩個不同的交點，且這兩個交點所在直線與 x 軸夾角為 45°，那麼實數 a=________。

A. $-\dfrac{1}{2}$　B. $\dfrac{1}{2}$　C. –2　D. 2

答案：D

解答：（1）這兩個交點應互相關於(1,1)對稱，故過這兩個交點的直線也過(1,1)，即直線方程為 $y=x$；

（2）$y^2=ax$ 與 $y=x$ 的交點為(0,0)和(a,a)，故(0,0)和(a,a)關於(1,1)對稱；故 a=2

二、填空題（每小題 5 分，共 40 分）

9. In the sequence $\{a_n\}$, $a_1=2$ and $a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}$ for all positive integers(正整數)($\forall n\ge 1$), Determine $\sum_{k=1}^{2015}a_k=$________.

答案：1009

翻譯：已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1=2$，$a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}$（$\forall n\ge 1$），則 $\sum_{k=1}^{2015} a_k=$ ________。

解答：由遞推公式可得: $a_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$a_3=1-\frac{1}{a_2}=-1$，$a_4=1-\frac{1}{a_3}=2=a_1$；

故 $a_5=a_2$，$a_6=a_3$；

$\{a_n\}$ 為週期數列 $2,\frac{1}{2},-1,2,\frac{1}{2},-1,\cdots$；

$$\sum_{k=1}^{2015} a_k=a_1+a_2+671\times(2+\frac{1}{2}-1)=\frac{2018}{2}=1009$$

10. 二次曲線：$3x^2-8xy+7y^2+4x-2y-109=0$ 上的整點(x,y)共有________個。

答案：4

解答：看作關於 x 的二次方程 $3x^2+4(1-2y)x+(7y^2-2y-109)=0$；

則$\triangle=16(1-2y)^2-12(7y^2-2y-109)=4(-5y^2-10y+331)=4[336-5(y+1)^2]\ge 0$；

得 $|y+1|\le 8$，逐個驗證：

$y+1=\pm 4$ 時，$\triangle=4\times 256=32^2$；

$y+1=\pm 8$ 時，$\triangle=4\times 16=8^2$；

整數解 $\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$、$\begin{cases}x=-2\\y=-5\end{cases}$、$\begin{cases}x=10\\y=7\end{cases}$、$\begin{cases}x=-14\\y=-9\end{cases}$，共 4 組

11. 已知 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，兩個對數 $\log_{\sin x}\cos x$ 與 $\log_{\cos x}\sqrt{\tan x}$ 均不為 0，且和為 1，則 $\sin x=$ ________。

答案：$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

解答：設 $y=\log_{\sin x}\cos x$，則 $\log_{\cos x}\sqrt{\tan x}=\frac{1}{2}(\log_{\cos x}\sin x-1)=\frac{1}{2}(\frac{1}{y}-1)$，

$\therefore y+\frac{1}{2}(\frac{1}{y}-1)=1$，解得 $y=\frac{1}{2}$ 或 1（捨去）；

$\therefore \log_{\sin x}\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos^2 x=\sin x\Rightarrow 1-\sin^2 x=\sin x\Rightarrow \sin x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$；

$\because 0<x<\frac{\pi}{2}$；$\therefore \sin x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

12. It is known $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)+5abx$ is an even function （偶函數）while $g(x)=2^x+\dfrac{a+b}{2^x}$ is an odd function（奇函數）. Find the value of a^3+b^3. ________.

答案：$-\dfrac{7}{10}$

翻譯：已知函數 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)+5abx$ 為偶函數，$g(x)=2^x+\dfrac{a+b}{2^x}$ 為奇函數，

則 $a^3+b^3=$________。

解答：（1）$\because f(x)=f(-x)$；

$\therefore \log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)+5abx=\log_{\frac{1}{3}}(3^{-x}+1)-5abx=\log_{\frac{1}{3}}3^{-x}(1+3^x)-5abx$

$=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)+x-5abx$；$\therefore 5abx=x-5abx$，$ab=\dfrac{1}{10}$

（2）$\because g(x)+g(-x)=0$；

$\therefore 2^x+\dfrac{a+b}{2^x}+2^{-x}+(a+b)2^x=0$，即 $(a+b+1)(2^x+2^{-x})=0$

$\therefore a+b=-1$；故 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=-1+\dfrac{3}{10}=-\dfrac{7}{10}$

13. $\triangle ABC$ 的三邊邊長 $AB=n+3x$，$BC=n+2x$，$CA=n+x$ 且 BC 邊上的高 $AD=n$，其中 n 為正整數且 $0<x\le 1$，則滿足上述條件的$\triangle ABC$ 共有________個（互不全等意義下）。

答案：12

解答：$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{(n+3x)^2+(n+2x)^2-(n+x)^2}{2(n+3x)(n+2x)}=\dfrac{(n+2x)(n+6x)}{2(n+3x)(n+2x)}$

$=\dfrac{n+6x}{2(n+3x)}$；$\sin B=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{n}{n+3x}$；

故 $\dfrac{n^2}{(n+3x)^2}+\dfrac{(n+6x)^2}{4(n+3x)^2}=1\Leftrightarrow n=12x=1、2、\cdots、11、12$；

$\therefore x=\dfrac{1}{12},\dfrac{2}{12},\cdots,\dfrac{12}{12}$，共 12 種取值

14. 三棱臺 $ABC-A_1B_1C_1$ 的任意兩個側面所成的二面角都是直二面角，高為 $\dfrac{3\sqrt{34}}{17}$ cm，且下底面$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=5$cm，$BC=4\sqrt{2}$ cm，則棱臺體積為________cm^3。

答案：7

解答：（1）延長 AA_1、BB_1、CC_1 交於 P，則 PA、PB、PC 兩兩垂直於 P；

$$\therefore \begin{cases} PA^2+PB^2=AB^2=5^2=25 \\ PA^2+PC^2=AC^2=5^2=25 \\ PB^2+PC^2=BC^2=(4\sqrt{2})^2=32 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} PA=3 \\ PB=4 \\ PC=4 \end{cases};$$

$$\therefore V_{P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 4\times 4=8\ ;$$

（2）$S_{\triangle ABC}=\dfrac{4\sqrt{2}\times\sqrt{25-8}}{2}=2\sqrt{34}$ ；

故 $h_{P\text{-}ABC}=\dfrac{3V_{P-ABC}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{24}{2\sqrt{34}}=\dfrac{6\sqrt{34}}{17}$ ；又平面 $A_1B_1C_1$//平面 ABC

$$h_{P-A_1B_1C_1}=\frac{6\sqrt{34}}{17}-\frac{3\sqrt{34}}{17}=\frac{3\sqrt{34}}{17}=\frac{1}{2}h_{P-ABC}\ ;$$

且四面體 $P\text{-}A_1B_1C_1$ 與 $P\text{-}ABC$ 相似，相似比為 1:2；

$$\therefore V_{A_1B_1C_1-ABC}=V_{P-ABC}-V_{P-A_1B_1C_1}=(1-\frac{1}{2^3})\times 8=7$$

15. 設 $y=f(x)$是定義在實數域上的實函數，且滿足 $f(a\cdot f(b))=ab$（$\forall a,b\in R$），那麼 $f(2015)=$________（求出所有可能取值）。

答案：±2015

解答：令 $a=1$，對 $\forall b\in R$ 有 $f(f(b))=b$ ；

設 $f(1)=x_0$ ，則 $f(f(1))=f(x_0)=1$ ；

則 $\forall a\in R$ ，$ax_0=f(a\cdot f(x_0))=f(a\cdot 1)=f(a)$ ，

令 $a=x_0$，則 $f(x_0)=x_0{}^2$， 故 $x_0{}^2=1$， $x_0=\pm 1$ ；

當 $x_0=1$ 時， $f(x\cdot f(1))=f(x)=x,\forall x\in R$ ；

當 $x_0=-1$ 時， $f(x\cdot f(-1))=f(x)=-x,\forall x\in R$ ；

故 $f(2015)=\pm 2015$

16. 已知三次函數 $y=x^3+ax^2+by+c$ 的圖像與 x 軸（從左至右）順次交於三個點 A、B、C，AP、CQ 是函數圖像的切線（P 與 A 不同，Q 與 C 不同，P、Q 為切點），則$|AC|$與線段 PQ 在 x 軸上的投影長度之比為____:____。

答案：2:1

解答：設 A、B、C 的座標分別為 $A(x_A,0)$，$B(x_B,0)$，$C(x_C,0)$；

則 $f(x)=(x-x_A)(x-x_B)(x-x_C)$

求導得 $f'(x)=(x-x_B)(x-x_C)+(x-x_C)(x-x_A)+(x-x_A)(x-x_B)$；

P 點切線斜率 $f'(x_P)=\dfrac{y_P-y_A}{x_P-x_A}=\dfrac{y_P-0}{x_P-x_A}=\dfrac{f(x_P)}{x_P-x_A}=(x_P-x_B)(x_P-x_C)$；

故 $0=f'(x_P)-(x_P-x_B)(x_P-x_C)=(x_P-x_C)(x_P-x_A)+(x_P-x_A)(x_P-x_B)$；

又因 $x_P\neq x_A$ $\therefore x_P=\dfrac{x_B+x_C}{2}$；

同理 $x_Q=\dfrac{x_A+x_B}{2}$；

$\therefore PQ$ 在 x 軸上投影長度$=\left|x_P-x_Q\right|=\left|\dfrac{x_A-x_C}{2}\right|=\dfrac{AC}{2}$

三、簡答題（每小題 10 分，共 20 分，請簡要寫出解答過程）

17. 求證：存在唯一的無窮項正數數列$\{a_n\}$，n$\in N^*$滿足：

（1）$a_1=2\sqrt{3}$；

（2）$\forall n\geq 2$，$a_{n-1}=\dfrac{8a_n}{4-a_n^{\ 2}}$，且這個數列$\{a_n\}$是單調遞減的；求 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$

證明：（1）由遞推關係式知

a_n 是方程 $a_{n-1}x^2+8x-4a_{n-1}=0$ 的唯一正根，$\dfrac{-4+2\sqrt{4+a_{n-1}^{\ 2}}}{a_{n-1}}$；

故滿足題目性質的無窮項正數數列存在且唯一

（2）由遞推關係式，知 $\dfrac{a_{n-1}}{2}=\dfrac{2\times\dfrac{a_n}{2}}{1-\left(\dfrac{a_n}{2}\right)^2}$，令 $\dfrac{a_n}{2}=\tan\theta_n(\forall n\geq 1)$；

則 $\tan\theta_{n-1}=\tan 2\theta_n$，且 $\tan\theta_1=\dfrac{a_1}{2}=\sqrt{3}$，故可令 $\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$

故通項公式為 $a_n=2\tan\left(\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}\right)$，（ $\forall n\geq 1$ ）；

由此易見$\{a_n\}$是單調遞減數列，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=2\tan 0=0$

18. 求證：$\sum_{k=0}^{1000}\binom{1000}{k}\binom{2015+k}{2015}(-1)^k=\binom{2015}{1015}$；其中$\binom{n}{m}=C_n^m$

證明：左邊$=\sum_{k=0}^{1000}\binom{1000}{k}\cdot(-1)^k\cdot\left[\sum_{t=1000-k}^{1000}\binom{2015}{1015+t}\binom{k}{1000-t}\right]$

$$=\sum_{t=0}^{1000}\binom{2015}{1015+t}\cdot\left[\sum_{k=1000-t}^{1000}\binom{1000}{k}\binom{k}{1000-t}\cdot(-1)^k\right]$$

$$=\sum_{t=0}^{1000}\binom{2015}{1015+t}\cdot\left[\sum_{k=1000-t}^{1000}\frac{1000!}{k!(1000-k)!}\cdot\frac{k!}{(k-1000+t)!(1000-t)!}\cdot(-1)^k\right]$$

$$=\sum_{t=0}^{1000}\binom{2015}{1015+t}\cdot\left[\sum_{k=1000-t}^{1000}\frac{1000!}{(1000-t)!t!}\cdot\frac{t!}{(k+t-1000)!(1000-k)!}\cdot(-1)^k\right]$$

$$=\sum_{t=0}^{1000}\binom{2015}{1015+t}\cdot\binom{1000}{t}\cdot\sum_{k=1000-t}^{1000}\binom{t}{1000-k}\cdot(-1)^{1000-k}\;;$$

而 $\sum_{k=1000-t}^{1000}\binom{t}{1000-k}\cdot(-1)^{1000-k}=\binom{t}{t}\cdot(-1)^t+\binom{t}{t-1}\cdot(-1)^{t-1}+\ldots+\binom{t}{0}\cdot(-1)^0$

$$=\begin{cases}1, & t=0\\ 0, & t>0\end{cases};$$

$\therefore$左邊$=\binom{2015}{1015+0}\cdot\binom{1000}{0}=\binom{2015}{1015}$