高中一年級 決賽試題解答

◎ 第1-16題請將答案填寫在下面答案表內！
◎ 第17-18題需在試題空白處寫出計算過程，否則不予計分！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案	D	D	D	C	A	D	B	B
填空題	9	10	11	12	13	14	15	16
答 案	2	1009	110	$-\frac{7}{10}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	12	±2015	4

一、選擇題（每小題 5 分，共 40 分）

1. 若 $M=\{(x,y)\,\|\tan(\pi x)|+\sin^2(\pi y)=0\}$，$N=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2\}$，則 $|M\cap N|=$（　　）。

A. 4　　B. 5　　C. 8　　D. 9

答案：D

解答：$\tan(\pi x)=0=\sin(\pi y)\Leftrightarrow x,y\in\mathbf{Z}$，$\therefore M=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbf{Z}\}$，

$M\cap N=\{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0),(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$

2. In $\triangle ABC$ and $\triangle A'B'C'$, if $\angle A=\angle A'$ and $\sin B+\sin C>\sin B'+\sin C'$, then which of the following statements is the correct statement?

A. $B-C>B'-C'$　　B. $|B-C|>|B'-C'|$　　C. $B-C<B'-C'$　　D. $|B-C|<|B'-C'|$

答案：D

翻譯：在$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$中，若$\angle A=\angle A'$且$\sin B+\sin C>\sin B'+\sin C'$，則以下比較一定成立的是？

解答：由和差化積公式：$\sin B+\sin C=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$\sin B'+\sin C'=2\sin\frac{B'+C'}{2}\cos\frac{B'-C'}{2}$；

$\because \angle A=\angle A'$，$\therefore \sin\frac{B+C}{2}=\sin\frac{B'+C'}{2}>0$；$\therefore \cos\frac{B-C}{2}>\cos\frac{B'-C'}{2}$；

由餘弦函數的奇偶性和單調性可得$\left|\frac{B-C}{2}\right|<\left|\frac{B'-C'}{2}\right|$

3. $\{F_n\}$表示常見的 *Fibonacci* 數列：$F_0=0$、$F_1=1$、$F_2=1$、$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$（n 為任意自然數），設 $G_n=\sum_{i=1}^{n}F_{2i}$，$H_n=\sum_{i=1}^{n}F_{2i-1}$，那麼 $G_{2015}-H_{2015}$ 的值為（　　）。

A. F_{2015}　　B. F_{4029}　　C. H_{2014}　　D. G_{2014}

答案：D

解答：$F_2=F_1$；$F_4=F_2+F_3$；⋯；$F_{2016}=F_{2014}+F_{2015}$；

$G_{2015}=F_2+F_4+F_6+\cdots+F_{4030}=F_0+F_1+F_2+F_3+\cdots+F_{4028}+F_{4029}$；

$H_{2015}=F_1+F_3+F_5+\cdots+F_{4029}=F_1+F_1+F_2+F_3+F_4+\cdots+F_{4027}+F_{4028}$；

$G_{2015}-H_{2015}=F_0+F_2+F_4+F_6+\cdots+F_{4028}=G_{2014}=F_{4029}-F_1$

4. 設 a、b、c 為實數，那麼對任意實數 x，不等式 $a\sin x+b\cos x+c>0$ 恆成立的充分必要條件是（　　）。

A. $a=b=0$ 且 $c>0$　　B. $\sqrt{a^2+b^2}=c$　　C. $\sqrt{a^2+b^2}<c$　　D. $\sqrt{a^2+b^2}>c$

答案：C

解答：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi_0)$（其中 φ_0 滿足 $\cos\varphi_0=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\varphi_0=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$）

$\therefore a\sin x+b\cos x$ 的取值範圍是 $\left[-\sqrt{a^2+b^2},\sqrt{a^2+b^2}\right]$

故 $a\sin x+b\cos x+c>0$（$\forall x\in$□ 恆成立）$\Leftrightarrow -\sqrt{a^2+b^2}+c>0\Leftrightarrow c>\sqrt{a^2+b^2}$

5. 已知 $x_1=16$，$x_2=14$，$x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}^2-4}{x_n}$（$\forall n\geq 1$），則數列 $\{x_n\}$ 的性質是（　　）。

A. 只有有限項，且對數列中連續三項，總有 $x_{n+2}=2x_{n+1}-x_n$

B. 有無窮多項，且對數列中連續三項，總有 $x_{n+2}=2x_{n+1}-x_n$

C. 只有有限項，且存在數列中連續三項，使 $x_{n+2}\neq 2x_{n+1}-x_n$

D. 有無窮多項，且存在數列中連續三項，使 $x_{n+2}\neq 2x_{n+1}-x_n$

答案：A

解答：$x_nx_{n+2}=x_{n+1}^2-4$，$x_{n+1}x_{n+3}=x_{n+2}^2-4$，兩式相減得 $x_nx_{n+2}-x_{n+1}x_{n+3}=x_{n+1}^2-x_{n+2}^2$

$\Leftrightarrow x_nx_{n+2}+x_{n+2}^2=x_{n+1}x_{n+3}+x_{n+1}^2$　$\Leftrightarrow (x_n+x_{n+2})x_{n+2}=(x_{n+1}+x_{n+3})x_{n+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_{n+1}+x_{n+3}}{x_{n+2}}=\dfrac{x_n+x_{n+2}}{x_{n+1}}=\dfrac{x_1+x_3}{x_2}=2$，$\therefore x_{n+2}=2x_{n+1}-x_n$，

即 $\{x_n\}$ 是公差為 -2 的等差數列 $x_1=16$，$x_2=14$，$x_3=12$，⋯，$x_9=0$，$x_{10}=-2$；

遞推至第 11 項時 $x_{11}=\dfrac{{x_{10}}^2-4}{x_9}=\dfrac{(-2)^2-4}{0}$ 無意義，故數列只有 10 項

6. 直線 $x\cos\theta+y+2015=0$中，θ 是某三角形的最大內角，則這樣的直線的傾斜角的變化範圍是（　　）。

A. $[-\arctan\frac{1}{2},\frac{\pi}{4})$　B. $[0,\frac{\pi}{4})\cup[\frac{2\pi}{3},\pi)$　C. $[0,\frac{\pi}{4})$　D. $[0,\frac{\pi}{4})\cup[\pi-\arctan\frac{1}{2},\pi)$

答案：D

解答：$\theta\in[60°,180°)$，$\therefore\cos\theta\in(-1,\frac{1}{2}]$，$k=-\cos\theta\in[-\frac{1}{2},1)$；

設傾角為α（$\alpha\in[0,\pi)$），則當$k=\tan\alpha\in[-\frac{1}{2},0)$時，$\alpha\in[\pi-\arctan\frac{1}{2},\pi)$；

當$k=\tan\alpha\in[0,1)$時，$\alpha\in[0,\frac{\pi}{4})$

7. 集合$A=\{1,2,\cdots,2015\}$，則定義在 A 上的單調遞增函數 $f:A\to A$（即$\forall x,y\in A$，$x\le y$，有 $f(x)\le f(y)$）共有（　　）個。

A. C_{4030}^{2015}　B. C_{4029}^{2015}　C. C_{4028}^{2015}　D. C_{4028}^{2014}

答案：B

解答：$1\le f(1)\le f(2)\le\cdots\le f(2015)\le 2015$；$1\le f(1)<f(2)+1<f(3)+2<\cdots<f(2015)+2014\le 4029$；

從 1 至 4029 中任選 2015 個數，即 C_{4029}^{2015} 種方法

8. 已知函數 $f(x)=\lg(x+1)$，當(x,y)在 $y=f(x)$的圖像上運動時，點$(\frac{x}{3},\frac{y}{2})$在函數 $y=g(x)$的圖像上運動，則函數 $h(x)=g(x)-f(x)$ 的最大值是（　　）。

A. $\frac{1}{2}\lg\frac{8}{9}$　B. $-\frac{1}{2}\lg\frac{8}{9}$　C. $\frac{2}{3}$　D. 0

答案：B

解答：(x,y)滿足的方程為 $y=\lg(x+1)$，

則$\left(\frac{x}{3},\frac{y}{2}\right)$滿足的方程為$2y=\lg(3x+1)$；$\therefore g(x)=\frac{1}{2}\lg(3x+1)$，

$h(x)=\frac{1}{2}\lg(3x+1)-\lg(x+1)=\lg\frac{\sqrt{3x+1}}{x+1}$（$x\in(-\frac{1}{3},+\infty)$），

設$u=\sqrt{3x+1}$（$u\in(0,+\infty)$）

則 $h(x)=\lg\frac{\sqrt{3x+1}}{x+1}=\lg\frac{u}{\frac{u^2-1}{3}+1}=\lg\frac{3u}{u^2+2}=\lg\frac{3}{u+\frac{2}{u}}\le\lg\frac{3}{2\sqrt{2}}=\lg\sqrt{\frac{9}{8}}=-\frac{1}{2}\lg\frac{8}{9}$

二、填空題（每小題 5 分，共 40 分）

9. 已知拋物線 $y^2=ax$ 與其關於點(1,1)對稱的曲線恰有兩個不同的交點，且這兩個交點所在直線與 x 軸夾角為 45°，那麼實數 a=________ 。

答案：2

解答：（1）這兩個交點應互相關於(1,1)對稱，故過這兩個交點的直線也過(1,1)，即直線方程為 $y=x$；

（2）$y^2=ax$ 與 $y=x$ 的交點為(0,0)和(a,a)，故(0,0)和(a,a)關於(1,1)對稱；故 $a=2$

10. In the sequence $\{a_n\}$, $a_1=2$ and $a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}$ for all positive integers(正整數)($\forall n\geq 1$), Determine $\sum_{k=1}^{2015} a_k=$ ________.

答案：1009

翻譯：已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1=2$，$a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}$（$\forall n\geq 1$），則 $\sum_{k=1}^{2015} a_k=$ ________ 。

解答：由遞推公式可得: $a_2=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，$a_3=1-\dfrac{1}{a_2}=-1$，$a_4=1-\dfrac{1}{a_3}=2=a_1$；

故 $a_5=a_2$，$a_6=a_3$；

$\{a_n\}$ 為週期數列 $2,\dfrac{1}{2},-1,2,\dfrac{1}{2},-1,\cdots$；

$$\sum_{k=1}^{2015} a_k=a_1+a_2+671\times(2+\frac{1}{2}-1)=\frac{2018}{2}=1009$$

11. 已知二次函數 $f(x)=x^2+(\lg a+2)x+\lg b$，且 $f(-1)=-2$，對一切 $x\in R$，$f(x)\geq 2x$ 恆成立，則 $a+b=$ ________ 。

答案：110

解答：$f(-1)=-2\Rightarrow \lg a=\lg b+1$，

$f(x)\geq 2x\Leftrightarrow x^2+(\lg a)x+\lg b\geq 0\Leftrightarrow \triangle=(\lg a)^2-4(\lg b)\leq 0$；

$\therefore(\lg b+1)^2-4\lg b\leq 0$，即 $(\lg b-1)^2\leq 0$；

$\therefore \lg b=1$，$\lg a=2$，$b=10$，$a=100$

12. It is known $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)+5abx$ is an even function （偶函數）while $g(x)=2^x+\dfrac{a+b}{2^x}$ is an odd function（奇函數）. Find the value of a^3+b^3. ________.

答案：$-\dfrac{7}{10}$

翻譯：已知函數 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)+5abx$ 為偶函數，$g(x)=2^x+\dfrac{a+b}{2^x}$ 為奇函數，則 a^3+b^3=________。

解答：（1）$\because f(x)=f(-x)$；

$\therefore \log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)+5abx=\log_{\frac{1}{3}}(3^{-x}+1)-5abx=\log_{\frac{1}{3}}3^{-x}(1+3^x)-5abx$

$=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)+x-5abx$；$\therefore 5abx=x-5abx$，$ab=\dfrac{1}{10}$

（2）$\because g(x)+g(-x)=0$；

$\therefore 2^x+\dfrac{a+b}{2^x}+2^{-x}+(a+b)2^x=0$，即 $(a+b+1)(2^x+2^{-x})=0$

$\therefore a+b=-1$；故 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=-1+\dfrac{3}{10}=-\dfrac{7}{10}$

13. 已知 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，兩個對數 $\log_{\sin x}\cos x$ 與 $\log_{\cos x}\sqrt{\tan x}$ 均不為 0，且和為 1，則 $\sin x=$ ________。

答案：$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

解答：設 $y=\log_{\sin x}\cos x$，則 $\log_{\cos x}\sqrt{\tan x}=\dfrac{1}{2}(\log_{\cos x}\sin x-1)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{y}-1)$，

$\therefore y+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{y}-1)=1$，解得 $y=\dfrac{1}{2}$ 或 1（捨去）;

$\therefore \log_{\sin x}\cos x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \cos^2 x=\sin x\Rightarrow 1-\sin^2 x=\sin x\Rightarrow \sin x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$；

$\because 0<x<\dfrac{\pi}{2}$；$\therefore \sin x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

14. △ABC 的三邊邊長 $AB=n+3x$，$BC=n+2x$，$CA=n+x$ 且 BC 邊上的高 $AD=n$，其中 n 為正整數且 $0<x\le 1$，則滿足上述條件的△ABC 共有________個（互不全等意義下）。

答案：12

解答：$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{(n+3x)^2+(n+2x)^2-(n+x)^2}{2(n+3x)(n+2x)}=\dfrac{(n+2x)(n+6x)}{2(n+3x)(n+2x)}$

$=\dfrac{n+6x}{2(n+3x)}$；$\sin B=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{n}{n+3x}$；

故 $\dfrac{n^2}{(n+3x)^2}+\dfrac{(n+6x)^2}{4(n+3x)^2}=1 \Leftrightarrow n=12x$ =1、2、…、11、12；

$\therefore x=\dfrac{1}{12},\dfrac{2}{12},\cdots,\dfrac{12}{12}$，共 12 種取值

15. 設 $y=f(x)$是定義在實數域上的實函數，且滿足 $f(a\cdot f(b))=ab$（$\forall a,b\in R$），那麼 $f(2015)=$________（求出所有可能取值）。

答案：±2015

解答：令 $a=1$，對 $\forall b\in R$ 有 $f(f(b))=b$；

設 $f(1)=x_0$，則 $f(f(1))=f(x_0)=1$；

則 $\forall a\in R$，$ax_0=f(a\cdot f(x_0))=f(a\cdot 1)=f(a)$，

令 $a=x_0$，則 $f(x_0)=x_0{}^2$，故 $x_0{}^2=1$，$x_0=\pm 1$；

當 $x_0=1$ 時，$f(x\cdot f(1))=f(x)=x, \forall x\in R$；

當 $x_0=-1$ 時，$f(x\cdot f(-1))=f(x)=-x, \forall x\in R$；

故 $f(2015)=\pm 2015$

16. 已知不等式 $a\le \dfrac{3}{4}x^2-3x+4\le b$ 的解集是 $\{a\le x\le b\}$（其中 $a<b$）則 $b=$______。

答案：4

解答：二次函數 $f(x)=\dfrac{3}{4}x^2-3x+4=\dfrac{3}{4}(x-2)^2+1$ 的圖像頂點為(2,1)，

對稱軸為 $x=2$，開口向上；

若 $a>f_{min}=f(2)=1$，則

$a\le \dfrac{3}{4}x^2-3x+4\le b$ 的解集為兩個關於 $x=2$ 對稱的區間；

故 $a\le 1$，且 a、b 關於 $x=2$ 對稱，且 $f(a)=f(b)=b\ge 3$；

解方程 $\dfrac{3}{4}b^2-3b+4=b$，得 $b_1=4$，$b_2=\dfrac{4}{3}$（捨去）

三、簡答題（每小題 10 分，共 20 分，請簡要寫出解答過程）

17. 已知滿足不等式$\lg(20-5x^2)>\lg(a-x)+1$的整數 x 只有一個，（其中 a 為常數）求常數 a 的取值範圍。

解答：原不等式$\Leftrightarrow 20-5x^2>10(a-x)\Leftrightarrow x^2-2x+(2a-4)<0\Leftrightarrow a<-\frac{1}{2}x^2+x+2$

考察函數 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+2=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{5}{2}$ ；

f(x)的最大值為 $f(1)=\frac{5}{2}$ ，在 $x\in$□上的次大值為 $f(0)=f(2)=2$ ；

由題目條件僅一個整數滿足 $f(x)>a$ ，這個整數只能是 $x=1$ ；

故 a 的取值範圍是 $2\le a<\frac{5}{2}$

18. 求證：存在唯一的無窮項正數數列$\{a_n\}$，n$\in N^*$滿足：

（1）$a_1=2\sqrt{3}$ ；

（2）$\forall n\ge 2$ ，$a_{n-1}=\frac{8a_n}{4-a_n^{\ 2}}$ ，且這個數列$\{a_n\}$是單調遞減的；求 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$

證明：（1）由遞推關係式知

a_n是方程 $a_{n-1}x^2+8x-4a_{n-1}=0$ 的唯一正根，$\frac{-4+2\sqrt{4+a_{n-1}^{\ 2}}}{a_{n-1}}$ ；

故滿足題目性質的無窮項正數數列存在且唯一

（2）由遞推關係式，知 $\frac{a_{n-1}}{2}=\frac{2\times\frac{a_n}{2}}{1-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$ ，令 $\frac{a_n}{2}=\tan\theta_n(\forall n\ge 1)$ ；

則 $\tan\theta_{n-1}=\tan 2\theta_n$ ，且 $\tan\theta_1=\frac{a_1}{2}=\sqrt{3}$ ，故可令 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$

故通項公式為 $a_n=2\tan\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}\right)$ ，（ $\forall n\ge 1$ ）；

由此易見$\{a_n\}$是單調遞減數列，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=2\tan 0=0$