

2015 國際數學競賽 台灣區初賽

2015 International Mathematics Contest (Taiwan)

國中三年級組 試卷

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題 (每題 10 分)

- (D) 1. Please calculate $\frac{1}{2} + \frac{1}{7} = ?$ (A) $\frac{2}{9}$ (B) $\frac{1}{14}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{9}{14}$

解析：計算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{7}{14} + \frac{2}{14} = \frac{9}{14}$

- (B) 2. Please calculate $199^2 + 398 = ?$
 (A) 39989 (B) 39999 (C) 39899 (D) 40999

解析：原式 = $199 \times 199 + 199 \times 2 = 199 \times (199 + 2) = (200 - 1) \times (200 + 1)$
 $= 200^2 - 1^2 = 40000 - 1 = 39999$ ，選(B)。

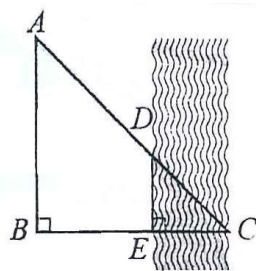
- (B) 3. Which of following formula is fault ?

- (A) $\sqrt{900} = 30$ (B) $\sqrt{9\frac{1}{4}} = 3\frac{1}{2}$
 (C) $\sqrt{14400} = 120$ (D) $\sqrt{0.000324} = 0.018$

解析：翻譯：下列敘述何者錯誤？

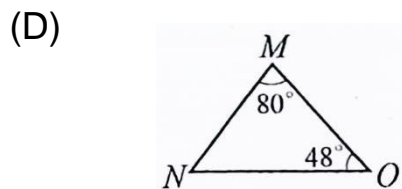
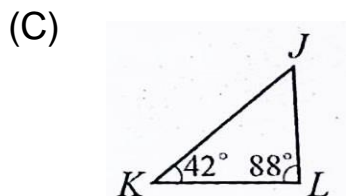
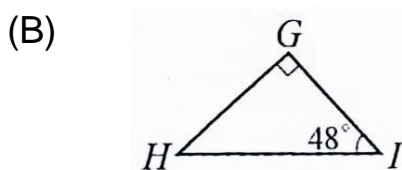
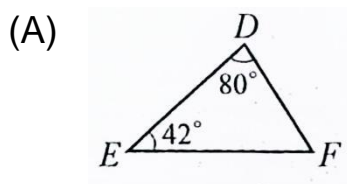
(B)錯， $\sqrt{9\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$

- (B) 4. 測量河寬 \overline{CE} ，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{AB} = 24$ 公尺，
 $\overline{DE} = 8$ 公尺， $\overline{BE} = 10$ 公尺，則河寬 \overline{CE} 是多
 少公尺？ (A) 8 (B) 5 (C) 10 (D) 12



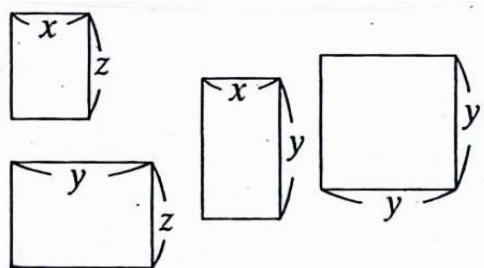
解析：設 $\overline{CE} = x$ ， $x : (x + 10) = 8 : 24 \Rightarrow x = 5$

(B) 5. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 42^\circ$ ， $\angle C = 48^\circ$ ，則下列哪一個三角形會與 $\triangle ABC$ 相似？



解析： $\angle B = 180^\circ - (42^\circ + 48^\circ) = 90^\circ$ ，故選(B)

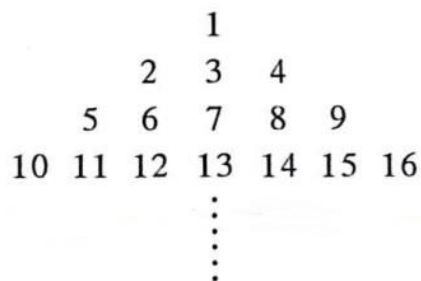
(A) 6. 如右圖，有 4 片長方形吐司，浩男想將這 4 片吐司拼成一片大矩形，則拼成矩形的長、寬可能為多少？



- (A) $(y+z) \cdot (x+y)$ (B) $(x+z) \cdot (y+z)$
 (C) $(x+y) \cdot (x+z)$ (D) $(y+z) \cdot (x+2z)$

解析： $xz + xy + y^2 + yz = x(z+y) + y(y+z) = (y+z)(x+y)$

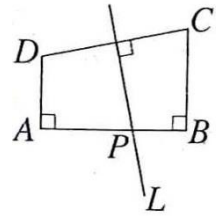
(A) 7. 觀察右圖的數字規律，試求出第 100 行從左邊數過來的第二個數字是多少？



- (A) 9803 (B) 9901
 (C) 10002 (D) 12317

解析：觀察可發現每一行的最後一個數字為完全平方數，所以第 99 行的最後一個數字為 $99^2 = (100 - 1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$ ，故第 100 行從左邊數過來的第二個數字為 $9801 + 2 = 9803$

- (A) 8. 如右圖，在梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AD} = 20$ ， $\overline{BC} = 30$ ， $\overline{AB} = 40$ ，且 \overline{CD} 之中垂線 L 交 \overline{AB} 於 P ，則 $\overline{AP} = ?$

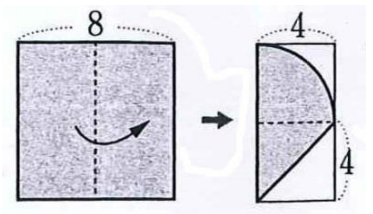


- (A) $\frac{105}{4}$ (B) $\frac{107}{4}$ (C) $\frac{109}{4}$ (D) $\frac{111}{4}$

解析：設 $\overline{AP} = x \Rightarrow \overline{PB} = 40 - x$ ，連接 \overline{PD} 、 \overline{PC}

$$\begin{aligned} \because L \text{ 為 } \overline{CD} \text{ 的中垂線, } \therefore \overline{PD} &= \overline{PC} \Rightarrow \overline{PD}^2 = \overline{PC}^2 \\ \Rightarrow 20^2 + x^2 &= (40 - x)^2 + 30^2 \Rightarrow x = \frac{105}{4} \end{aligned}$$

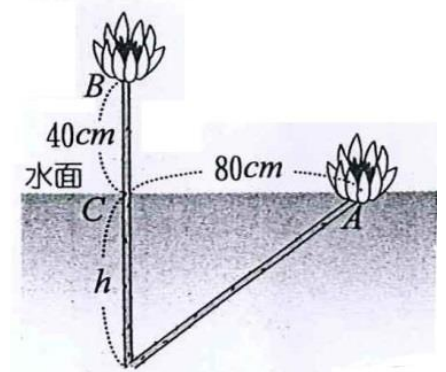
- (C) 9. 如右圖，將邊長 8 公分的正方形對摺，並於對摺後圖形高度一半處上方剪一 $\frac{1}{4}$ 圓弧，下方剪一直線，則展開後剩餘著色面積為多少平方公分？



- (A) $16\pi + 16$ (B) $8\pi + 8$ (C) $8\pi + 16$ (D) $16\pi + 8$

解析： $(4^2\pi \times \frac{1}{4} + 4 \times 4 \times \frac{1}{2}) \times 2 = 8\pi + 16$ 平方公分

- (C) 10. 有一朵盛開的荷花垂直出水面 40 公分，突然飛來一隻蜂鳥來採花蜜，荷花不勝重量負荷，整枝斜躺水面，離原來出水點 80 公分，如圖，請問水深 h 有多少公分？



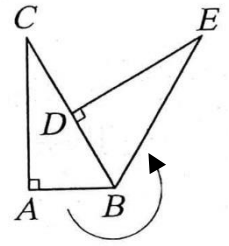
- (A) 80 公分 (B) 70 公分
(C) 60 公分 (D) 50 公分

解析： $(40 + h)^2 = h^2 + 80^2$ ，

$$1600 + 80h + h^2 = h^2 + 6400,$$

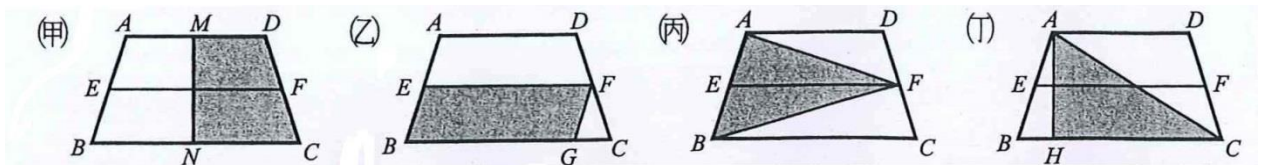
$$\therefore 80h = 4800, h = 60 \text{ 公分}$$

- (C) 11. 如右圖，直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，若固定 B 點將 $\triangle ABC$ 按逆時鐘方向旋轉，使得 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBE$ 完全重合，則 A 點到 D 點共旋轉多少度？
- (A) 30° (B) 60° (C) 300° (D) 330°



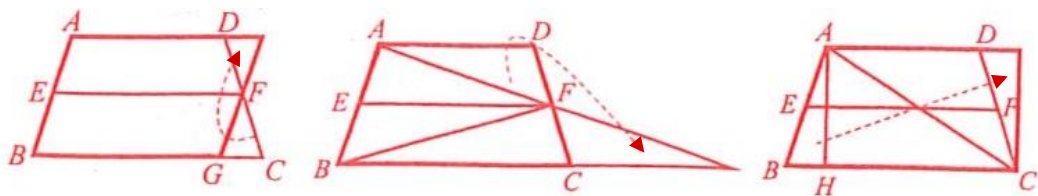
解析： $\angle B = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ， \therefore 共轉 $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

- (D) 12. 梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， E 、 F 、 M 、 N 分別為 \overline{AB} 、 \overline{DC} 、 \overline{AD} 、 \overline{BC} 中點， $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{FG} \parallel \overline{AB}$ ，則以下四個圖形中：(甲) 四邊形 $MNCD$ ；(乙) 四邊形 $BEFG$ ；(丙) $\triangle ABF$ ；(丁) $\triangle AHC$ ，哪幾個圖形面積為梯形 $ABCD$ 的一半？

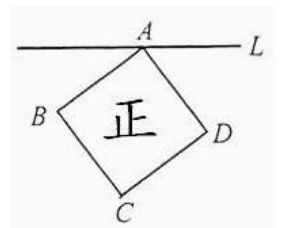


- (A) 甲、乙 (B) 甲、乙、丙 (C) 甲、乙、丁 (D) 甲、乙、丙、丁

解析：經由面積置換(如圖)，可推知乙、丙、丁的灰色區域面積皆為梯形 $ABCD$ 面積的一半，而甲圖形中，梯形 $MNCD$ 與 $ABNM$ 等高，且上底等長、下底等長，所以面積相等，故 $MNCD$ 的面積為梯形 $ABCD$ 面積的一半



- (D) 13. 如圖，建宏布置教室，在教室貼上勵志標語(正方形 $ABCD$)，不小心貼歪了。如果以 L 為坐標平面上的 x 軸(A 在直線 L 上)，以 A 為原點， B 的坐標為 $(-8, -6)$ ，求 C 點坐標？



- (A) $(-1, -14)$ (B) $(-1, -15)$ (C) $(-3, -15)$ (D) $(-2, -14)$

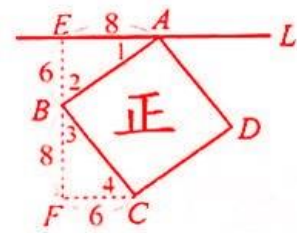
解析：作 $\overline{BE} \perp \overline{AE}$ ， $\overline{BF} \perp \overline{CF}$

$$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ \Rightarrow \angle 1 = \angle 3$$

同理： $\angle 2 = \angle 4$ ，又 $\overline{AB} = \overline{BC}$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF \text{ (ASA)}$$

$$\Rightarrow C(0 - 8 + 6, 0 - 6 - 8) = C(-2, -14)$$



(D) 14. $\triangle ABC$ 中， $\angle A > \angle B$ ， $\angle B$ 的外角小於 120° ，則下列何者正確？

(A) \overline{AB} 最長， \overline{AC} 最短

(B) \overline{AB} 最長， \overline{BC} 最短

(C) \overline{AC} 最長， \overline{AB} 最短

(D) \overline{BC} 最長， \overline{AB} 最短

解析： $\because \angle B$ 的外角小於 120°

$$\Rightarrow \angle B > 60^\circ \Rightarrow \angle A > \angle B > 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle C < 60^\circ \Rightarrow \angle A > \angle B > \angle C$$

$$\therefore \overline{BC} > \overline{AC} > \overline{AB}$$

(D) 15. 有一天，哈利波特從鏡子裡看到石內卜老師魔法日記記載的密碼為

P2358b，聰明的哈利波特馬上知道其真實密碼為何？

(A) P2853b

(B) P5823b

(C) d85E2q

(D) d82E5q

解析：P 對稱 q，2 對稱為 5，3 對稱為 E，b 對稱為 d，

且鏡子中看到的順序會顛倒，所以為 d82E5q

(D) 16. 右圖 $\triangle ABC$ 中， $\angle B$ 與 $\angle C$ 的平行線交於 M ，

過 M 作 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 交 \overline{AB} 、 \overline{AC} 於 D 、 E 兩點。

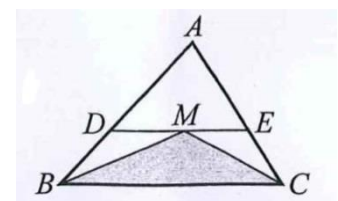
若 $\overline{AB} = 8$ 、 $\overline{AC} = 7$ 、 $\overline{BC} = 9$ ，則 $\overline{DE} : \overline{BC}$ 之

值是多少？ (A) 11 : 13

(B) 8 : 9

(C) 7 : 8

(D) 5 : 8



解析： $\overline{DE} = \overline{BD} + \overline{CE}$ ，

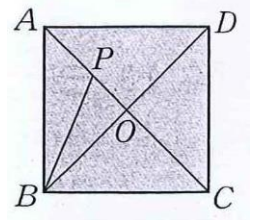
$$\therefore \triangle ADE \text{ 周長} = \overline{AD} + \overline{DE} + \overline{AE} = \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CE} + \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{AC} = 15$$

$$\because \triangle ADE \sim \triangle ABC, \therefore \triangle ADE \text{ 周長} : \triangle ABC \text{ 周長} = \overline{DE} : \overline{BC},$$

$$\text{故 } \overline{DE} : \overline{BC} = 15 : 24 = 5 : 8$$

- (A) 17. 如右圖， $ABCD$ 為正方形， $\overline{AP} = 7$ ， $\overline{BP} = 13$ ，則 $ABCD$ 的面積為多少平方單位？

- (A) 288 (B) 576 (C) 240 (D) 480

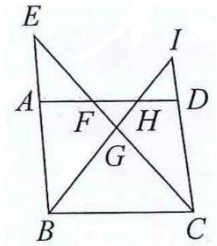


解析：設 $\overline{AO} = \overline{BO} = x$ ， $\overline{OP} = x - 7$ ， $13^2 = x^2 + (x - 7)^2$ ， $x = 12$

$$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{BD} = 2 \times 12 = 24, \text{ } ABCD \text{ 面積} = 24 \times 24 \div 2 = 288$$

- (C) 18. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{BE} \parallel \overline{CI}$ ，則圖中可找到幾組相似三角形？

- (A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 9



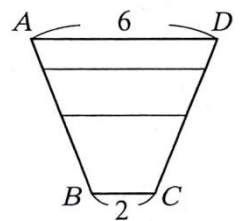
解析： $\triangle EAF \sim \triangle EBC$ ， $\triangle EAF \sim \triangle CDF$

$$\triangle EBC \sim \triangle CDF, \triangle IDH \sim \triangle ICB$$

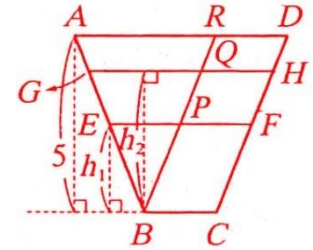
$$\triangle IDH \sim \triangle BAH, \triangle ICB \sim \triangle BAH$$

$$\triangle EBG \sim \triangle CIG, \triangle FGH \sim \triangle CGB$$

- (C) 19. 庭筠的外婆家前面有一灌溉用的溝渠，其側面為一等腰梯形，如右圖，且 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，溝底 $\overline{BC} = 2$ 公尺，溝面 $\overline{AD} = 6$ 公尺，溝渠深為 5 公尺，若原本水面寬為 4 公尺，後來颱風來襲，水面寬變為 5.2 公尺，試問水位上升多少公尺？ (A) 0.9 (B) 1.2 (C) 1.5 (D) 1.8



解析：如右圖，作 $\overline{BR} \parallel \overline{CD}$

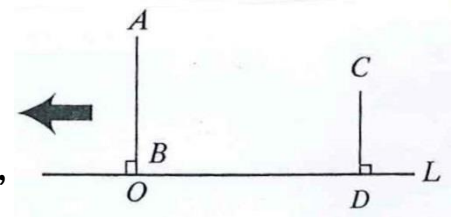


$$\therefore \overline{EP} = 4 - 2 = 2, \overline{AR} = 6 - 2 = 4,$$

$$\frac{h_1}{5} = \frac{\overline{EP}}{\overline{AR}} = \frac{2}{4}, h_1 = 2.5, \text{ 又 } \overline{GQ} = 5.2 - 2 = 3.2,$$

$$\frac{h_2}{5} = \frac{\overline{GQ}}{\overline{AR}} = \frac{3.2}{4}, h_2 = 4, \therefore h_2 - h_1 = 4 - 2.5 = 1.5 \text{ 公尺}$$

- (C) 20. 如右圖， O 、 D 為直線 L 上的點， $\overline{CD} = 3$ 公分， $\overline{OD} = 8$ 公分， $\overline{CD} \perp L$ 於 D 。今有一線段 \overline{AB} 長度為 5 公分，若將 \overline{AB} 置於 O 點處，使 $\overline{AB} \perp L$ ，並將 \overline{AB} 慢慢的往左邊移動，則移動的過程中以 A 、 B 、 O 為頂點的三角形與 $\triangle COD$ 相似者有幾個？



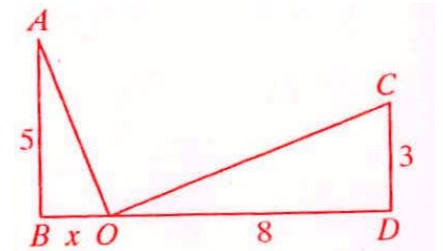
- (A) 0 個 (B) 1 個 (C) 2 個 (D) 無限多個

解析：分兩種情形

$$(1) \frac{\overline{OD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{8}{3} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{40}{3}$$

$$(2) \frac{\overline{OD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} \Rightarrow \frac{8}{3} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{15}{8}$$

\therefore 當 $\overline{OB} = \frac{15}{8}$ 或 $\frac{40}{3}$ 時，兩三角形相似， \therefore 有 2 個



- (A) 21. 阿山心中想一個數，發現在第 2、4、5 排都出現他想的數，那麼他想的數是多少？

(A) 26

(B) 27

(C) 28

(D) 29

第 1 排	第 2 排	第 3 排	第 4 排	第 5 排
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	⋮
7	7	7	11	⋮
9	10	12	12	⋮
11	11	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
17	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

解析： $2+8+16=26$

- (A) 22. 一包巧克力有 50 顆，因為無法平分給學生，所以老師吃了 6 顆，剩下的還是不能平分，老師再拿起 4 顆，剩下的巧克力剛好分完，學生人數不到 30 人，學生人數可能 a 人或 b 人，那麼 $a+b=?$
- (A) 28 (B) 29 (C) 30 (D) 18

解析：① 50 的因數有 1、2、5、10、25、50， $50-6=44$ ；

② 44 的因數有 1、2、4、11、22、44， $44-4=40$ ；

③ 40 的因數有 1、2、4、5、8、10、20、40；

④ 人數是 40 的因數，但不能是 50 或 44 的因數，所以學生有 8 人或 20 人；

⑤ $a+b=8+20=28$

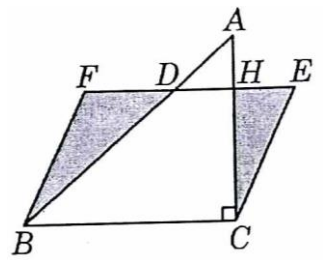
- (C) 23. 把民國年數加上 1911 就是西元年數，例如：民國 80 年，西元就是 $80+1911=1991$ 年，今年是西元 2015 年，請問下列 是多少？
- 【1】看一下你（妳）手機號碼的最後一位
- 【2】把這個數字乘上 4
- 【3】然後加上 20
- 【4】再乘以 25
- 【5】把得到的數目加上
- 【6】最後一個步驟，用這個數目減去你（妳）出生的那一西元年，現在你（妳）看到一個三位數的數字，第一位數字是你（妳）手機號碼的最後一位，接下來就是你（妳）的實際年齡！
- (A) 1715 (B) 1615 (C) 1515 (D) 1415

解析：令手機號碼最後一位是 $x \Rightarrow$

$$(4x+20) \times 25 + \text{} = 100x + 2015, \quad 100x + 500 + \text{} = 100x + 2015$$

$$500 + \text{} = 2015, \quad \text{} = 1515$$

- (A) 24. 如圖， $BCEF$ 是平行四邊形，三角形 ABC 是一個直角三角形， BC 長 8 公分， AC 長 7 公分，陰影部分面積比三角形 ADH 的面積大 12 平方公分，求 HC 的長度。

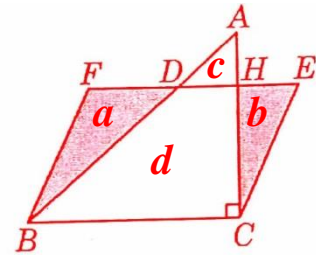


- (A) 5 公分 (B) 4.5 公分 (C) 6 公分 (D) 5.5 公分

解析： $a+b=c+12$ ， $a+b+d=c+d+12$ ，

$$BCEF \text{ 面積} = \text{直角} \triangle ABC + 12 = 8 \times 7 \div 2 + 12 = 40，$$

$$BC \times HC = 40，8 \times HC = 40，HC = 5 \text{ 公分}$$



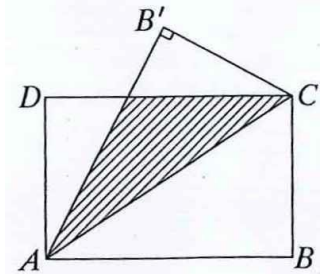
- (B) 25. 從 49 名學生中選一名班長，甲、乙、丙為候選人。統計 37 張選票後的結果是：甲得 15 票，乙得 10 票，丙得 12 票。甲至少再得多少張票才能以票數最多當選？

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

- 解析：① 如果甲多 1 票 \Rightarrow 甲 16 票；丙多 11 票 \Rightarrow 丙 23 票，則甲不當選
 ② 如果甲多 2 票 \Rightarrow 甲 17 票；丙多 10 票 \Rightarrow 丙 22 票，則甲不當選
 ③ 如果甲多 3 票 \Rightarrow 甲 18 票；丙多 9 票 \Rightarrow 丙 21 票，則甲不當選
 ④ 如果甲多 4 票 \Rightarrow 甲 19 票；丙多 8 票 \Rightarrow 丙 20 票，則甲不當選
 ⑤ 如果甲多 5 票 \Rightarrow 甲 20 票；丙多 7 票 \Rightarrow 丙 19 票，則甲當選

二、計算題（每題 25 分）

1. 如右圖，長方形 $ABCD$ ， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 4$ ，將此一長方形之一半沿著對角線 \overline{AC} 向上摺疊，則斜線部分面積為多少？



解析：∵ 摺疊原理，

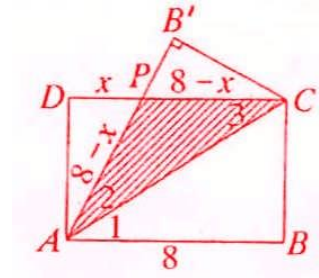
$$\therefore \angle 1 = \angle 2 \text{ 又 } \angle 1 = \angle 3 \text{ (內錯角相等)}$$

$$\Rightarrow \angle 2 = \angle 3 \Rightarrow \overline{AP} = \overline{CP},$$

$$\text{設 } \overline{DP} = x \text{ 則 } \overline{CP} = 8 - x = \overline{AP}$$

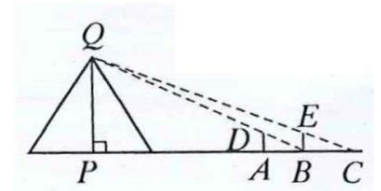
$$\therefore (8 - x)^2 = 4^2 + x^2 \Rightarrow x = 3$$

$$\therefore \text{斜線面積} = ABCD (4 \times 8) - \triangle ADP \left(\frac{3 \times 4}{2} \right) - \triangle ABC \left(\frac{8 \times 4}{2} \right) = 10$$



答：10

2. 如右圖，設金字塔高為 \overline{QP} ，我們拿一根 2 公尺的標尺，垂直豎立在 A 點上，測得 $\overline{AB} = 6$ 公尺，現將標尺移到 B 點，再測得 $\overline{BC} = 7$ 公尺。求金字塔高 \overline{QP} 。



解析：令 $\overline{QP} = x$ 公尺， $\overline{AP} = y$ 公尺

$$\overline{AD} \parallel \overline{PQ} \Rightarrow \frac{\overline{DA}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BP}} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{6}{6+y}$$

$$\overline{EB} \parallel \overline{PQ} \Rightarrow \frac{\overline{EB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{PC}} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{7}{6+7+y}$$

$$\begin{cases} 6x = 12 + 2y \\ 7x = 26 + 2y \end{cases} \Rightarrow x = 14 \text{ 公尺}$$

答：14 公尺