2015 IMC 國際數學競賽 台灣區初賽

2015 International Mathematics Contest (Taiwan)

高中二年級組　試卷

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題（每題 10 分）

(E) 1. If $f(x)=x^3-2x^2-x+5$, and multinomial $g(x)=f(f(x))\div(x-2)$, the remainder is？ (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

解析：翻譯：若 $f(x)=x^3-2x^2-x+5$，則多項式 $g(x)=f(f(x))$ 除以 $(x-2)$ 所得的餘式為何？ 所求 $g(2)=f(f(2))=f(3)=11$

(C) 2. On number line can meet $|2x-3|\le 10$, how many x integer？

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

解析：翻譯：在數線上滿足 $|2x-3|\le 10$ 的整數 x 有多少個？

$|2x-3|\le 10 \Rightarrow -10\le 2x-3\le 10 \Rightarrow -\dfrac{7}{2}\le x\le \dfrac{13}{2}$，但 $x\in Z$

$\therefore\ x=-3$，-2，-1，0，1，2，…，6（有 10 個）

(B) 3. If a, b are real numbers and $(a+bi)(2+6i)=-80$, therefore $a+b=$？

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14

解析：翻譯：設 a, b 為實數且 $(a+bi)(2+6i)=-80$，則 $a+b=$？

$\Rightarrow\ a+bi=\dfrac{-80}{2+6i}=\dfrac{-40}{1+3i}=-4+12i$

$\Rightarrow a=-4,\ b=12$ 故 $a+b=8$

(C) 4. 已知一等差數列共有十項，且知其奇數項之和為 15，偶數項之和為 30，則下列哪一選項為此數列之公差？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

解析：設等差數列之首項 a_1，公差 d，則

奇數項和 $=a_1+a_3+\cdots+a_9=\dfrac{5(a_1+a_9)}{2}=\dfrac{5[a_1+(a_1+8d)]}{2}=5(a_1+4d)=15$

偶數項和 $= a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} = \dfrac{5(a_2 + a_{10})}{2} = \dfrac{5[(a_1+d)+(a_1+9d)]}{2}$

$= 5\ (a_1 + 5d)\ = 30$

解 $\begin{cases} a_1 + 4d = 3 \\ a_1 + 5d = 6 \end{cases}$ 得 $d = 3$

(D) 5. 設某沙漠地區某一段時間的溫度函數為 $f\ (t) = -t^2 + 10t + 11$，其中 $1 \le t \le 10$，則這段時間內該地區的最大溫差為

(A) 9 (B) 16 (C) 20 (D) 25 (E) 36

解析：$f(t) = -t^2 + 10t + 11 = 36 - (t - 5)^2$

因 $1 \le t \le 10$，故當 $t = 5$ 時有最大值 36；

當 $t = 10$ 時有最小值 11 $\Rightarrow$ 該地區的最大溫差為 $36 - 11 = 25$，選(D)

(C) 6. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a，b，c，d 為實數，$a \ne 0$)，已知 $f(2-i) = 0$ ($i = \sqrt{-1}$)，則 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸有幾個交點？

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0 (E) 0，1，2，3 都有可能

解析：$f(2-i) = 0$ 必使 $f(\overline{2-i}) = f(2+i) = 0$

($\because$ $f(x)$ 是實係數多項式)

$\therefore$ $f(x) = 0$ 的三個根必為 $2-i$，$2+i$ 及另一個實根 α

$\therefore$ $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸恰交於一點 $(\alpha, 0)$

(D) 7. 第 1 天獲得 1 元、第 2 天獲得 2 元、第 3 天獲得 4 元、第 4 天獲得 8 元、依此每天所獲得的錢為前一天的兩倍，如此進行到第 30 天，試問這 30 天所獲得的錢，總數最接近下列哪一個選項？

(A) 10 , 000 元 (B) 1, 000 , 000 元 (C) 100 , 000 , 000 元

(D) 1, 000 , 000 , 000 元 (E) 1, 000 , 000 , 000 , 000 元

解析：$1+2+4+\cdots+2^{29}=\frac{1[2^{30}-1]}{2-1}=2^{30}-1\approx 2^{30}=(2^{10})^3\approx(10^3)^3=10^9$

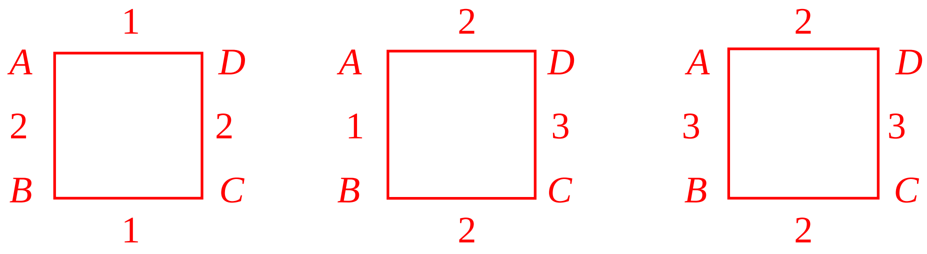
(　C　) 8. 滿足不等式 $\frac{1}{104}\le(\sqrt{10})^x\le 2015$ 的整數 x 共有多少個？

(A) 9　(B) 10　(C) 11　(D) 12　(E) 13

解析：$\frac{1}{104^2}\le 10^x\le 2015^2$　$\therefore 10^x=10^{-4},10^{-3},10^{-2},10^{-1},\cdots,10^6$，共 11 個

(　D　) 9. 將正方形 $ABCD$ 的每一條邊各自標上 1、2、3 中的某一個數，使得任兩條相鄰的邊，都標有恰好差 1 的兩個數。滿足這種條件的標示法總共有多少種？　(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8　(E) 10

解析：



考慮排列 $\Rightarrow$ 共 2 種　　共 4 種　　共 2 種

(　B　) 10. 小東預定在陽台上種植玫瑰、百合、菊花和向日葵等四種盆栽。如果陽台上的空間最多能種 8 盆，可以不必擺滿，並且每種花至少一盆，則小東買盆栽的方法共有幾種？

(A) 1680　(B) 70　(C) 56　(D) 256　(E) 168

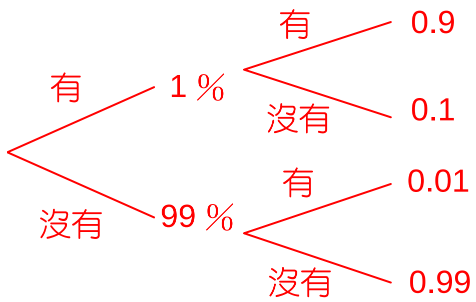
解析：設玫瑰有 x 盒；設百合有 y 盒；設菊花有 z 盒；設向日葵有 u 盒

$x+y+z+u\le 8$，$x\ge 1$，$y\ge 1$，$z\ge 1$，$u\ge 1$

故所求為 $H^5_4=C^8_4=70$

(C) 11. 有某種試驗方法，患癌症者經此方法檢驗發現有癌症的機率為 0.9，沒患癌症者經檢驗發現有癌症的機率為 0.01；某地區人口中患有癌症者有 1 %，今在此地區任選一人，經此法檢驗有癌症，則此人確有癌症的機率為 (A) $\frac{8}{21}$ (B) $\frac{9}{21}$ (C) $\frac{10}{21}$ (D) $\frac{11}{21}$ (E) $\frac{12}{21}$

解析：



$$\therefore p=\frac{\frac{1}{100}\times\frac{9}{10}}{\frac{1}{100}\times\frac{9}{10}+\frac{99}{100}\times\frac{1}{100}}=\frac{10}{21}$$，故選(C)

(E) 12. 令 X 代表每個高中生平均每天研讀數學的時間（以小時計），則 $W=7(24-X)$ 代表每個高中生平均每週花在研讀數學以外的時間。令 Y 代表每個高中生數學學科能力測驗的成績。設 X，Y 之相關係數 R_{XY}，W，Y 之相關係數為 R_{WY}，則 R_{XY} 與 R_{WY} 兩數之間的關係，下列選項何者為真？

(A) $R_{WY}=7(24-R_{XY})$ (B) $R_{WY}=7R_{XY}$ (C) $R_{WY}=-7R_{XY}$

(D) $R_{WY}=R_{XY}$ (E) $R_{WY}=-R_{XY}$

解析：$R(aX+b，cY+d)=\begin{cases} R_{XY}，若\ ac>0 \\ -R_{XY}，若\ ac<0 \end{cases}$，

因此 $R_{WY}=R(-7X+168，Y)=-R_{XY}$，故選(E)

(E) 13. 試求 $log_8\sqrt{1-cos\,30^\circ}+log_8\sqrt{2+tan\,60^\circ}=$ ？

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $-\frac{1}{6}$

解析：$log_8\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}+log_8\sqrt{2+\sqrt{3}}=log_8\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=log_8\sqrt{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{6}$

(D) 14. $Sin\theta-cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$Sin\theta, cos\theta$ 為 $2x^2+px+q=0$ 的兩根，則判別式

$p^2-8q=$ ？ (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{4}{3}$ (E) $\frac{5}{3}$

解析：$sin\theta+cos\theta=-\frac{p}{2}\Rightarrow p=-2(sin\theta+cos\theta)$

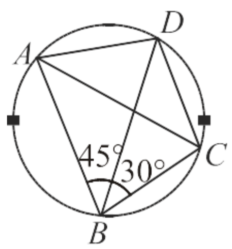
$sin\theta\cdot cos\theta=\frac{q}{2}\Rightarrow q=2sin\theta cos\theta$

則 $p^2-8q=[-2(sin\theta+cos\theta)]^2-8(2sin\theta cos\theta)$

$=4\left[(sin\theta+cos\theta)^2-4sin\theta cos\theta\right]=4(sin\theta-cos\theta)^2=4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{3}$

(C) 15. 如圖所示，$ABCD$ 為圓內接四邊形，若 $\angle DBC=30°$，

$\angle ABD=45°$，$\overline{CD}=6$，則線段 $\overline{AD}=$ ？



(A) $\sqrt{2}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3}$ (E) $4\sqrt{3}$

解析：$\triangle ABD$ 與 $\triangle BCD$ 有相同的外接圓，

則 $\frac{\overline{AD}}{sin\,45°}=2R=\frac{6}{sin\,30°}$，故 $\overline{AD}=6\sqrt{2}$

(E) 16. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=5$，$cos\angle ABC=-\frac{3}{5}$，且其外接圓半徑為 $\frac{13}{2}$，則

$sin\angle BAC=$ ？

(A) $\frac{13}{60}$ (B) $\frac{13}{30}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{12}{65}$ (E) $\frac{33}{65}$

解析：$cosB=-\frac{3}{5}\Rightarrow sinB=\frac{4}{5}$

由正弦定理：$\frac{5}{sinC}=2R=13\Rightarrow sinC=\frac{5}{13}\Rightarrow cosC=\frac{12}{13}$

$\therefore\ sinA=sin\ (180°-(B+C))=sin\ (B+C))=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+(-\frac{3}{5})\times\frac{5}{13}=\frac{33}{65}$

(E) 17. 以 $x-cos130^\circ$ 除多項式 $f(x)=4x^3-3x+2$ 之餘式為？

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $2-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $2+\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：所求：由餘式定理 $f\ (cos\ 130°)=4\ cos\ ^3130°-3\ cos\ 130°+2$

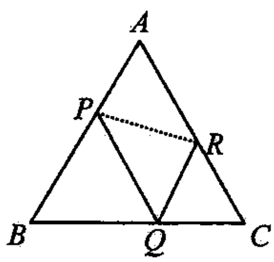
$=cos\ 390°+2=cos\ 30°+2=2+\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) 18. $\triangle ABC$ 中，已知 $2sinA+3cosB=\sqrt{5}$ 且 $3sinB+2cosA=2\sqrt{5}$，則 $\angle C$？ (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90° (E) 120°

解析：由已知兩式平方相加 $\Rightarrow 4+9+12\ sin\ (A+B)=25$

$\therefore\ sin\ (A+B)=1$ $\therefore\ A+B=90°$，故$\angle C=90°$

(D) 19. 在邊長為 13 的正三角形 ABC 上各邊分別取一點 P、Q、R，使得 $APQR$ 形成一平行四邊形，如右圖所示：若平行四邊形 $APQR$ 的面積為 $20\sqrt{3}$，則線段 $\overline{PR}$ 的長度為________。



(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

解析：$\because$ $APQR$ 為一平行四邊形，$\therefore$ $\overline{AR}=\overline{PQ}=\overline{PB}$ 且 $\overline{AP}=\overline{RQ}=\overline{RC}$

設 $\overline{AP}=x$，$\overline{PB}=\overline{AR}=13-x$

$\triangle APR$ 的面積$=\frac{1}{2}\overline{AP}\times\overline{AR}\times sin\ A=\frac{1}{2}x(13-x)\times sin\ 60°=10\sqrt{3}\Rightarrow x=5$ 或 8

$\overline{PR}^2=5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\ cos60°=49$, $\overline{PR}=7$

(C) 20. 莎韻觀測遠方等速率垂直上升的熱氣球。在上午 10 : 00 熱氣球的仰角為 30°，到上午 10 : 10 仰角變成 34°。請利用下表判斷到上午 10 : 30 時，熱氣球的仰角最接近下列哪一個度數？

θ	30°	34°	39°	40°	41°	42°	43°
sinθ	0.500	0.559	0.629	0.643	0.656	0.669	0.682
cosθ	0.866	0.829	0.777	0.766	0.755	0.743	0.731
tanθ	0.577	0.675	0.810	0.839	0.869	0.900	0.933

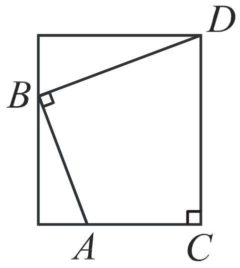
(A) 39° (B) 40° (C) 41° (D) 42° (E) 43°

解析： 設熱氣球之水平距離為 1

∴ $\tan 34° - \tan 30° = 0.098$ (10 分鐘)

故 $\tan 30° + 3 \times 0.098 = 0.871 \approx \tan 41°$

(B) 21. 如右圖 $\angle BAC = \theta$，$\angle ABD = \angle ACD = 90°$，$\overline{AB} = a$，$\overline{BD} = b$。下列選項何者可以表示 $\overline{CD}$ ？



(A) $a\sin\theta + b\cos\theta$ (B) $a\sin\theta - b\cos\theta$

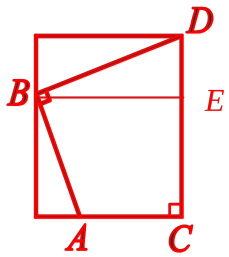
(C) $a\cos\theta - b\sin\theta$ (D) $a\cos\theta + b\sin\theta$

(E) $a\sin\theta + b\tan\theta$

解析： $\overline{CD} = \overline{CE} + \overline{DE} = a\cos(\theta - 90°) + b\sin(\theta - 90°)$

$= a\cos(90° - \theta) + b\sin(90° - \theta)$

$= a\sin\theta - b\cos\theta$



(E) 22. 學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。一、國文成績或英文成績 70 分(含)以上；二、數學成績及格。已知小文上學期國文 65 分而且他不符合參選模範生資格。請問下列哪一個選項的推論是正確的？

(A) 小文的英文成績未達 70 分

(B) 小文的數學成績不及格

(C) 小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格

(D) 小文的英文成績未達 70 分且數學成績不及格

(E) 小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格

解析：設 p 表國文成績 70 分(含)以上；q 表英文成績 70 分(含)以上；

r 表數學成績及格

所求：$\sim((p \vee q) \wedge r) \equiv \sim(p \vee q) \vee \sim r \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee \sim r$

故小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格

(C) 23. 把民國年數加上 1911 就是西元年數，例如：民國 80 年，西元就是 80+1911=1991 年，今年是西元 2015 年，請問下列 $\square$ 是多少？

【1】看一下你（妳）手機號碼的最後一位

【2】把這個數字乘上 4

【3】然後加上 20

【4】再乘以 25

【5】把得到的數目加上 $\square$

【6】最後一個步驟，用這個數目減去你（妳）出生的那一西元年，現在你（妳）看到一個三位數的數字，第一位數字是你（妳）手機號碼的最後一位，接下來就是你（妳）的實際年齡！

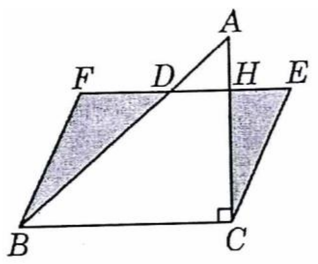
(A) 1715 (B) 1615 (C) 1515 (D) 1415

解析：令手機號碼最後一位是 x ⇒

$(4x+20)\times25+\square=100x+2015$，$100x+500+\square=100x+2015$

$500+\square=2015$，$\square=1515$

(A) 24. 如圖，$BCEF$ 是平行四邊形，三角形 ABC 是一個直角三角形，BC 長 8 公分，AC 長 7 公分，陰影部分面積比三角形 ADH 的面積大 12 平方公分，求 HC 的長度。

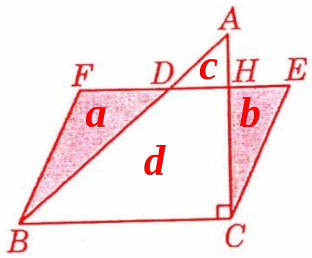


(A) 5 公分　(B) 4.5 公分　(C) 6 公分　(D) 5.5 公分

解析：$a+b=c+12$，$a+b+d=c+d+12$，

$BCEF$ 面積=直角△$ABC+12=8\times7\div2+12=40$，

$BC\times HC=40$，$8\times HC=40$，$HC=5$ 公分



(B) 25. 從 49 名學生中選一名班長，甲、乙、丙為候選人。統計 37 張選票後的結果是：甲得 15 票，乙得 10 票，丙得 12 票。甲至少再得多少張票才能以票數最多當選？

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

解析：① 如果甲多 1 票 ⇒ 甲 16 票；丙多 11 票 ⇒ 丙 23 票，則甲不當選

② 如果甲多 2 票 ⇒ 甲 17 票；丙多 10 票 ⇒ 丙 22 票，則甲不當選

③ 如果甲多 3 票 ⇒ 甲 18 票；丙多 9 票 ⇒ 丙 21 票，則甲不當選

④ 如果甲多 4 票 ⇒ 甲 19 票；丙多 8 票 ⇒ 丙 20 票，則甲不當選

⑤ 如果甲多 5 票 ⇒ 甲 20 票；丙多 7 票 ⇒ 丙 19 票，則甲當選

二、計算題（每題 25 分）

1. 設$\triangle ABC$的三高分別為$\overline{AD}=6$，$\overline{BE}=4$，$\overline{CF}=3$。

(1) 試證$\triangle ABC$是一鈍角三角形。（10 分）

(2) 試求$\triangle ABC$的面積。（15 分）

解析：(1) $a:b:c=\dfrac{1}{\overline{AD}}:\dfrac{1}{\overline{BE}}:\dfrac{1}{\overline{CF}}=\dfrac{1}{6}:\dfrac{1}{4}:\dfrac{1}{3}=2:3:4$

令 $a=2k\,,b=3k\,,c=4k\ (k>0)$ $\because\ c>b>a$ $\therefore\ \angle C$最大

由餘弦定理：$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot 2k\cdot 3k}=-\dfrac{1}{4}<0$

$\therefore\ \angle C$ 為鈍角，故$\triangle ABC$為鈍角三角形

(2) $\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\dfrac{1}{2}a\overline{AD}\Rightarrow\dfrac{3}{4}\sqrt{15}\,k^2=6k$

$\therefore\ k=\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$，故 $\triangle ABC=6k=\dfrac{16\sqrt{15}}{5}$

答：(1) 略，(2) $\dfrac{16\sqrt{15}}{5}$

2. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式。已知 $f(x)$ 除以 x^2+x-2 之餘式為 $5x-11$，$f(x)$ 除以 x^2+x+2 之餘式為 $-3x-7$。

(1) 試求 $f(x)$ 除以 $x+2$ 之餘式為何？（10 分）

(2) 試求 $f(x)$？（以 ax^3+bx^2+cx+d 形式表示之）（15 分）

解析：(1) $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$\therefore$ 所求$=f(-2)=5\cdot(-2)-11=-21$

(2) 設 $f(x)=(x^2+x+2)(ax+b)-3x-7$

由$\begin{cases} f(1)=4(a+b)-10=-6 \\ f(-2)=4(-2a+b)-1=-21 \end{cases}$ $\therefore\ a=2\,,b=-1$

則 $f(x)=(x^2+x+2)(2x-1)-3x-7=2x^3+x^2-9$

答：(1) -21，(2) $2x^3+x^2-9$