2015 IMC 國際數學競賽 台灣區初賽

2015 International Mathematics Contest (Taiwan)

高中一年級組　試卷

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題（每題 10 分）

(D) 1. Put $0.\overline{21}$ into irreducible fraction $\frac{b}{a}$, therefore $a+b=$?

(A) 120　　(B) 80　　(C) 60　　(D) 40

解析：翻譯：將 $0.\overline{21}$ 化成最簡分數 $\frac{b}{a}$，則 $a+b=$ ？

$0.\overline{21}=\frac{21}{99}=\frac{7}{33}$，∴ $a=33$，$b=7$，$a+b=40$

(B) 2. Simplification $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=$?

(A) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$　(B) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$　(C) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$　(D) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

解析：翻譯：化簡 $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

(B) 3. $\frac{5^{100}+5^{101}}{5^{101}+5^{102}}$ is equal to which fraction? (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{3}{4}$

解析：翻譯：$\frac{5^{100}+5^{101}}{5^{101}+5^{102}}$ 的值與下列何數值最接近？

$\frac{5^{100}+5^{101}}{5^{101}+5^{102}}=\frac{5^{100}(1+5)}{5^{100}(5+25)}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

(A) 4. 計算 $365^2-366\times364+367\times368-366\times369$ 之值為何？

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

解析：設 $a=365$，

則原式 $=a^2-(a+1)(a-1)+(a+2)(a+3)-(a+1)(a+4)$

$=a^2-(a^2-1)+(a^2+5a+6)-(a^2+5a+4)=3$

(B) 5. 某派對上共有 20%的人抽菸，若走了 20 位抽菸的朋友後，現在剩下的只有 10%的人抽菸，請問原來派對上有多少人？

(A) 160 (B) 180 (C) 200 (D) 220

解析：設原有 x 人，$\dfrac{\frac{x}{5}-20}{x-20}=\dfrac{1}{10}$，$x=180$

(B) 6. 若 $6x^3+22x^2+22x+3=2(ax+b)(x^2+x+1)-13$，則 $a\times b=$？

(A) 12 (B) 24 (C) 14 (D) 28

解析：$6x^3+22x^2+22x+16=(ax+b)(2x^2+2x+2)$，$\begin{cases}2a=6\Rightarrow a=3\\ 2b=16\Rightarrow b=8\end{cases}$

(D) 7. 人類耳垂的形狀是由一對遺傳因子控制。耳垂分離者為顯性，緊貼者為隱性。假設思婷的父母親耳垂都分離，而思婷的耳垂緊貼，若思婷的母親又要生了，試問她母親這次生出耳垂分離且又是女孩的機率為何？

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{8}$

解析：設 T 為顯性，t 為隱性，雙親的基因均為 $(T，t)$

∴ 小孩的基因可能為 $(T，T)$、$(T，t)$、$(t，T)$、$(t，t)$，共四種

其中耳垂分離有 $(T，T)$、$(T，t)$、$(t，T)$ 三種

∴ 所求 $=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

(C) 8. 有一蓄水池側面為一拋物線，昨日水位（水面到最深底部的距離）為 2 公尺，水面寬為 4 公尺；今天下了一場雨，水位升高了 4 公尺，請問下過雨後的水面寬為多少公尺？

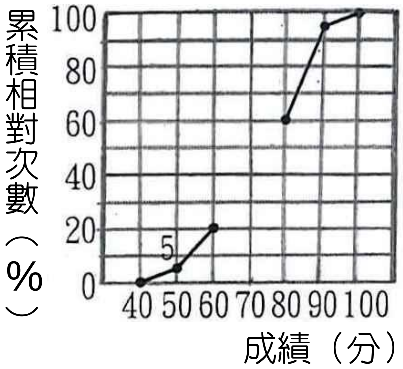
(A) 4 (B) $2\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) 2

解析：設拋物線方程式為 $y = mx^2$，

將 $x = 2$，$y = 2$ 代入得 $m = \frac{1}{2}$，$\therefore\ y = \frac{1}{2}x^2$，

當 $y = 6$ 時，$x^2 = 12$，$x = \pm 2\sqrt{3}$，水面寬為 $4\sqrt{3}$ 公尺

(B) 9. 右圖為阿華學校的三年級數學成績累積相對次數分配圖，已知 50～60 分的有 90 人，70～80 分的有 60 人，則此項成績的四分位距可能為何？



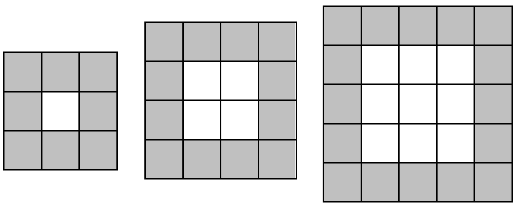
(A) 10 分　(B) 20 分

(C) 30 分　(D) 40 分

解析：由 50～60 分有 90 人占 15%，知 70～80 分占 10%，60～70 分占 30%，

$Q_1 \fallingdotseq 65$，$Q_3 \fallingdotseq 85$，四分位距 $\fallingdotseq 20$

(C) 10. 右圖是由兩種小正方形紙片排列成大正方形，觀察圖形規律，則圖(100)中灰色部分的小正方形紙片有多少張？



圖(1)　圖(2)　圖(3)　……

(A) 101　(B) 202　(C) 404　(D) 808

解析：圖(1)：$3^2 - 1^2 = 8$

圖(2)：$4^2 - 2^2 = 12$

圖(3)：$5^2 - 3^2 = 16$

⋮

⋮

圖(100)：$102^2 - 100^2 = (102 + 100)(102 - 100) = 202 \times 2 = 404$ 張

(D) 11. 計算$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{99^2})(1-\frac{1}{100^2})=$？

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{100}$ (C) $\frac{100}{101}$ (D) $\frac{101}{200}$

解析：利用平方差公式，

原式 $=(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{4})\times\cdots\times$

$(1-\frac{1}{98})(1+\frac{1}{98})\times(1-\frac{1}{99})(1+\frac{1}{99})\times(1-\frac{1}{100})(1+\frac{1}{100})$

$=(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2})\times(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3})\times(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4})\times\cdots\times(\frac{97}{98}\times\frac{99}{98})\times(\frac{98}{99}\times\frac{100}{99})\times(\frac{99}{100}\times\frac{101}{100})$

$=\frac{1}{2}\times\frac{101}{100}=\frac{101}{200}$

(C) 12. 若$\frac{9876x4}{15}$可化為有限小數，其中 x 是阿拉伯數字，所求可能 x 的和是多少？ (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16

解析：∵ $15=3\times5$，故欲使$\frac{9876x4}{15}$為有限小數，則分子必為 3 的倍數，

使分母剩下 $2^p\times5^q$ 之形式，又 $9+8+7+6+x+4=34+x$ 可被 3 整除，

則 $x=2$，5，8

(B) 13. 設 $f(x)$ 為二次多項式，且 $f(x)$ 以 x^2+x+1 除之餘式為 $5x-3$，以 $x-1$ 除之餘式為 -4，求 $f(2)=$？ (A) -6 (B) -7 (C) -8 (D) -9

解析：① 令 $f(x)=a(x^2+x+1)+5x-3$，

∵ $f(1)=-4$，∴ $f(1)=a(1+1+1)+5-3=3a+2$

∴ $3a+2=-4$，$a=-2$

② $f(x)=-2(x^2+x+1)+5x-3$，

∴ $f(2)=-2\times(2^2+2+1)+5\times2-3=-7$

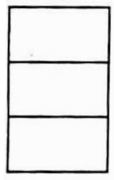
(A) 14. 設 x，y 為正整數，若 $xy+2x-3y=35$，則 $x+y=$？

(A) 31　　(B) 29　　(C) 27　　(D) 25

解析：$xy+2x-3y=35$ 化為$(xy+2x)-3(y+2)=29$，

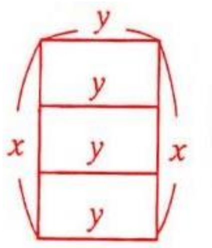
即$(x-3)(y+2)=29$，得 $x-3=1$，$y+2=29$，故 $x=4$，$y=27$

(C) 15. 阿土用鐵絲圍成面積 8 平方公尺的「目」字形區域，如圖所示，則他至少要準備多少公尺的鐵絲？（鐵絲厚度不計）



(A) $8\sqrt{2}$　　(B) $4\sqrt{2}$　　(C) 16　　(D) 18

解析：如圖所示設長為 x，寬為 y $\Rightarrow$ $xy=8$，



又鐵絲全長為 $2x+4y$，

由算幾不等式得 $2x+4y\geq 2\cdot\sqrt{2x\cdot 4y}$

$\Rightarrow$ $2x+4y\geq 2\cdot\sqrt{8\times 8}$ $\Rightarrow$ $2x+4y\geq 16$，

即至少要準備 16 公尺的鐵絲

(B) 16. 利用 $x^4+64=(x^2+8)^2-(4x)^2=(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)=$

$[x(x+4)+8][x(x-4)+8]$，

求 $\dfrac{(10^4+64)(18^4+64)(26^4+64)}{(6^4+64)(14^4+64)(22^4+64)}$ 之值？

(A) $\dfrac{193}{5}$　　(B) $\dfrac{197}{5}$　　(C) $\dfrac{199}{5}$　　(D) $\dfrac{201}{5}$

解析：所求＝

$$\frac{(10\times14+8)(10\times6+8)}{(6\times10+8)(6\times2+8)}\cdot\frac{(18\times22+8)(18\times14+8)}{(14\times18+8)(14\times10+8)}\cdot\frac{(26\times30+8)(26\times22+8)}{(22\times26+8)(22\times18+8)}$$

$$=\frac{26\times30+8}{6\times2+8}=\frac{788}{20}=\frac{197}{5}$$

(C) 17. 設 $n = 999\cdots9$（共有 2005 個 9），則 $n^2 + n - 2$ 含有數字 9 的個數是多少？ (A) 2004 (B) 2005 (C) 4008 (D) 4010

解析：$n^2 + n - 2 = n(n+1) - 2$

$= (999\cdots9)(999\cdots9 + 1) - 2 = (999\cdots9)(100\cdots0) - 2$

$= \underbrace{999\cdots9}_{2005\text{ 個}}\underbrace{0000\cdots0}_{2005\text{ 個}} - 2 = \underbrace{999\cdots9}_{2004\text{ 個}}8\underbrace{999\cdots9}_{2004\text{ 個}}8$

$\therefore$ 共 $2004 + 2004 = 4008$ 個

(D) 18. 求 38^{11} 除以 13 的餘數？ (A) 1 (B) 2 (C) 11 (D) 12

解析：① $38 = 13 \times 3 + (-1)$，

② $38^{11} = [\,13 \times 3 + (-1)\,]^{11} = 13k + (-1)^{11} = 13k + (-1) = 13(k-1) + 12$，

$\therefore$ 餘數為 12

(A) 19. 方程式 $(x^2 + 3x - 4)^2 + (2x^2 - 7x + 6)^2 = (3x^2 - 4x + 2)^2$ 的解之中最小是多少？ (A) -4 (B) $-\dfrac{3}{2}$ (C) -2 (D) -1

解析：令 $x^2 + 3x - 4 = y$，$2x^2 - 7x + 6 = z \Rightarrow y + z = 3x^2 - 4x + 2$，

$y^2 + z^2 = (y+z)^2$，$0 = 2yz$，$yz = 0$，

$(x^2 + 3x - 4)(2x^2 - 7x + 6) = 0$

$\Rightarrow (x+4)(x-1)(2x-3)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = -4$，1，$\dfrac{3}{2}$ 或 2

(A) 20. 定義 $f(x) = \begin{cases} f(f(x+10))，& x \le 100 \\ x - 9，& x > 100 \end{cases}$，求 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(100)$ $=$？ (A) 9200 (B) 9100 (C) 9000 (D) 8900

解析：① $f(1)=f(f(11))=f(f(21))=\cdots\cdots$（太複雜，所以從後面算起）

② $f(100)=f(f(110))=f(101)=92$

$f(99)=f(f(109))=f(100)=92$

⋮

⋮

$f(1)=f(2)=92$

③ 所求 $=92\times 100=9200$

(A) 21. 阿山心中想一個數，發現在第 2、4、5 排都出現他想的數，那麼他想的數是多少？

(A) 26

(B) 27

(C) 28

(D) 29

第 1 排	第 2 排	第 3 排	第 4 排	第 5 排
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	⋮
7	7	7	11	⋮
9	10	12	12	⋮
11	11	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
17	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

解析：2+8+16=26

(A) 22. 一包巧克力有 50 顆，因為無法平分給學生，所以老師吃了 6 顆，剩下的還是不能平分，老師再拿起 4 顆，剩下的巧克力剛好分完，學生人數不到 30 人，學生人數可能 a 人或 b 人，那麼 $a+b=$？

(A) 28　(B) 29　(C) 30　(D) 18

解析：① 50 的因數有 1、2、5、10、25、50，50−6=44；

② 44 的因數有 1、2、4、11、22、44，44−4=40；

③ 40 的因數有 1、2、4、5、8、10、20、40；

④ 人數是 40 的因數，但不能是 50 或 44 的因數，所以學生有 8 人或 20 人；

⑤ $a+b=8+20=28$

(C) 23. 把民國年數加上 1911 就是西元年數，例如：民國 80 年，西元就是 $80+1911=1991$ 年，今年是西元 2015 年，請問下列 $\square$ 是多少？

【1】看一下你（妳）手機號碼的最後一位

【2】把這個數字乘上 4

【3】然後加上 20

【4】再乘以 25

【5】把得到的數目加上 $\square$

【6】最後一個步驟，用這個數目減去你（妳）出生的那一西元年，現在你（妳）看到一個三位數的數字，第一位數字是你（妳）手機號碼的最後一位，接下來就是你（妳）的實際年齡！

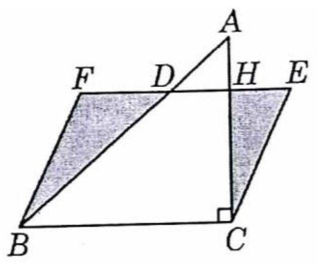
(A) 1715　(B) 1615　(C) 1515　(D) 1415

解析：令手機號碼最後一位是 x ⇒

$(4x+20)\times25+\square=100x+2015$，$100x+500+\square=100x+2015$

$500+\square=2015$，$\square=1515$

(A) 24. 如圖，$BCEF$ 是平行四邊形，三角形 ABC 是一個直角三角形，BC 長 8 公分，AC 長 7 公分，陰影部分面積比三角形 ADH 的面積大 12 平方公分，求 HC 的長度。

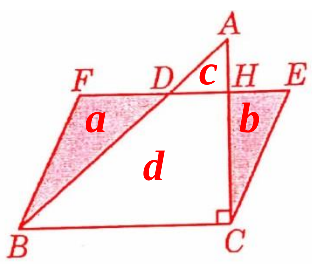


(A) 5 公分　(B) 4.5 公分　(C) 6 公分　(D) 5.5 公分

解析：$a+b=c+12$，$a+b+d=c+d+12$，

$BCEF$ 面積=直角△$ABC+12=8\times7\div2+12=40$，

$BC\times HC=40$，$8\times HC=40$，$HC=5$ 公分



(B) 25. 從 49 名學生中選一名班長，甲、乙、丙為候選人。統計 37 張選票後的結果是：甲得 15 票，乙得 10 票，丙得 12 票。甲至少再得多少張票才能以票數最多當選？

(A) 4　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 7

解析：① 如果甲多 1 票 $\Rightarrow$ 甲 16 票；丙多 11 票 $\Rightarrow$ 丙 23 票，則甲不當選

② 如果甲多 2 票 $\Rightarrow$ 甲 17 票；丙多 10 票 $\Rightarrow$ 丙 22 票，則甲不當選

③ 如果甲多 3 票 $\Rightarrow$ 甲 18 票；丙多 9 票 $\Rightarrow$ 丙 21 票，則甲不當選

④ 如果甲多 4 票 $\Rightarrow$ 甲 19 票；丙多 8 票 $\Rightarrow$ 丙 20 票，則甲不當選

⑤ 如果甲多 5 票 $\Rightarrow$ 甲 20 票；丙多 7 票 $\Rightarrow$ 丙 19 票，則甲當選

二、計算題（每題 25 分）

1. (1) 試證明：對於一切自然數 n

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$ 恆成立。(10 分)

(2) 計算 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}$ 的整數部分。(15 分)

解析：(1) ① 將分子有理化

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{1(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}，\frac{2(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}，$$

$$2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=\frac{2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{1(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}，\frac{2[n-(n-1)]}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}，$$

② $$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

③ $$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

(2) $n=2 \rightarrow 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})<\frac{1}{\sqrt{2}}<2(\sqrt{2}-\sqrt{1})$

$n=3 \rightarrow 2(\sqrt{4}-\sqrt{3})<\frac{1}{\sqrt{3}}<2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$\vdots$

$\vdots$

$n=100 \rightarrow 2(\sqrt{101}-\sqrt{100})<\frac{1}{\sqrt{100}}<2(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$2(-2+\sqrt{101})<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}<2(-1+\sqrt{100})$

$17.2<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}<18$

$18.2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}<19$

$\therefore\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}$ 的整數部分為 18

2. 設 a 為實數，若 $|2a-3|+|a-5|\leq|a+2|$ 恆成立，試求 a 的範圍。

解析：$|2a-3|+|a-5|\geq|(2a-3)-(a-5)|$

$\Rightarrow |2a-3|+|a-5|\geq|a+2|$……①，

又已知 $|2a-3|+|a-5|\leq|a+2|$……②，

由①②得知 $|2a-3|+|a-5|=|a+2|$

$\Rightarrow |2a-3|+|a-5|=|(2a-3)-(a-5)|$，

$\therefore (2a-3)(a-5)\leq 0$，

故 $\frac{3}{2}\leq a\leq 5$