10th IMC International Mathematics Contest (Singapore),2014

2014 年第十屆"IMC 國際數學競賽"（新加坡）
國中三年級決賽題

一、選擇題（每小題 5 分，共 40 分）

1. 若 α、β 是方程 $x^2+px+8=0$ 的兩個不同實根，$|\alpha|>|\beta|$，則下列結論中一定不成立的是（　　）。

   A. $|\alpha|>2$ 且 $|\beta|>2$　　B. $|\alpha|+|\beta|>4\sqrt{2}$　　C. $|\alpha|>3$ 且 $|\beta|>3$　　D. $|\alpha|>2\sqrt{2}$ 且 $|\beta|<2\sqrt{2}$

   答案：C

   解答：由求根公式得：α，$\beta=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-32}}{2}$，

   $\therefore\alpha$，β 與 $-p$ 同正負且 $|\alpha|=\dfrac{|p|+\sqrt{p^2-32}}{2}$，$|\beta|=\dfrac{|p|-\sqrt{p^2-32}}{2}$，

   又$\because\alpha$，β 為不同實根，$\therefore\triangle=p^2-32>0$，$\therefore|p|>4\sqrt{2}$，

   $\therefore|\alpha|+|\beta|=|p|>4\sqrt{2}$ 成立，B 選項成立，

   臨界情況當 $|p|=4\sqrt{2}$ 時，$|\alpha|+|\beta|=2\sqrt{2}<3$，知 C 選項一定不成立。

2. Determine counting numbers m and n so that the roots $4x^2-2mx+n=0$ is greater than 0 and less than 1.

   A. $m=1$，$n=1$　　B. $m=1$，$n=2$　　C. $m=2$，$n=1$　　D. $m=2$，$n=2$

   答案：C

   解答：有兩根$\Leftrightarrow\triangle=4m^2-16n\geq0$，$\therefore m^2\geq4n$，

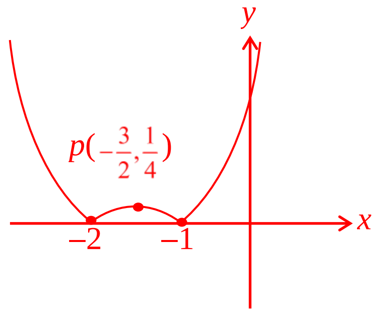
   可排除 A、B、D，直接驗證 C 即可。

3. What are the possible values of k so that the equation in terms of x $|x^2+3x+2|=k$ have only two roots?

   A. $k\geq0$　　B. $0<k<\dfrac{1}{4}$　　C. $k=0$ 或 $k>\dfrac{1}{4}$　　D. $k=\dfrac{1}{4}$

   答案：C

解答：$f(x)=x^2+3x+2=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}$



函數 $y=|x^2+3x+2|$的圖像如右圖，

由圖知：當 $k=0$ 或$k>\frac{1}{4}$時，原方程有兩個實數解。

4. 在△ABC 中，$AB=AC$，以 BC 中點 O 為圓心作⊙O 與 AB、AC 切於 D、E，過⊙O 中 DE 上一點 H 作切線交 AB、AC 於 F、G，則（　　）。

A. $OB^2=BD\cdot BF$　　B. $OB^2=BD\cdot CE$　　C. $OB^2=BF\cdot CG$　　D. $OB^2=BD\cdot CG$

答案：C

解答：令△ABC 為等腰直角三角形可算出結論，

一般情況中，△OFG∽△BFO∽△COG，$\therefore\frac{BO}{CG}=\frac{BF}{CO}$，$\therefore OB^2=BF\cdot CG$

5. 8 枚相同的硬幣正面向上排成一排，每次允許將相鄰且正反相同的兩枚硬幣同時翻面，經過若干次操作，所能得到的不同正反排列方式共有（　）種。

A. 128　　B. 70　　C. 64　　D. 50

答案：B

解答：將排列的位置從左至右編號為 1、2、3、…、8，

注意到每次操作保持如下性質不變：

（1）反面朝上的硬幣個數保持為偶數個；

（2）奇數位置上反面朝上的硬幣與偶數位置上反面朝上的硬幣個數保持相等；

反之任何一種滿足上述兩種性質的正反排列都可經有限次操作得到

∴共有：$C_4^0\cdot C_4^0+C_4^1\cdot C_4^1+C_4^2\cdot C_4^2+C_4^3\cdot C_4^3+C_4^4\cdot C_4^4=70$

6. 設 n 是不超過 2014 的正整數，則使得 $3^{n-1}\cdot n$ 為完全平方數的 n 有（　）個。

A. 33　　B. 23　　C. 28　　D. 29

答案：A

解答：（1）當 $3\nmid n$ 時，$3^{n-1}\cdot n$ 為完全平方数⇔$n-1$ 為偶數且 n 為完全平方數，

$\therefore n=1^2$、5^2、…、43^2 共 22–7=15 個（奇數平方且扣去 3 的倍數）；

（2）當 $3|n$ 時，不妨記 $n=3^k\cdot m$，$3\nmid m$，此時 $3^{n-1}\cdot n=3^{n-1+k}\cdot m$

① $k=1$ 時，m 為偶完全平方數且 $3\nmid m$，$m=2^2$、4^2、8^2、10^2、…、22^2，共 8 個；

② $k=2$ 時，m 為奇完全平方數且 $3\nmid m$，$m=1^2$、5^2、7^2、11^2、13^2，共 5 個；

③ $k=3$ 時，m 為偶完全平方數且 $3\nmid m$，$m=2^2$、4^2、8^2，共 3 個；

類似：④ $k=4$、6 時，$m=1^2$，共 1 個；

⑤ $k=5$ 時，$n=3^5\cdot 2^2>2014$，無合適的 n；

$\therefore$滿足要求的 n 共 15+8+5+3+1+1=33 個。

7. 给定⊙O 及圓外一點 P，X 為一動點在⊙O 圓周上運動。Y 是∠POX 的角平分線與線段 PX 的垂直平分線的交點。則點 Y 的軌跡為（　　）。

A. 一段圓弧　　B. 一條線段　　C. 一條直線　　D. 一條射線

答案：C

解答：$\because OY$ 為∠POX 的角平分線，

$\therefore \triangle YXO\cong\triangle YQO$（$Q$ 為線段 OP 與圓周交點），$\therefore YQ=YX$，

$\because Y$ 在 PX 的垂直平分線上，$\therefore YP=YX$，

$\therefore$不論 X 在圓周上何處總有 $YQ=YX=YP$，

$\therefore Y$ 點的運動軌跡為 PQ 的中垂線。

8. 若函數 $f(x)=x^2+ax+b$ 有兩個不同的零點 x_1、x_2，$3<x_1<x_2<4$，那麼在 $f(3)$，$f(4)$ 兩個函數值中（　　）。

A. 只有一個小於 $\frac{1}{4}$　　B. 至少有一個小於 $\frac{1}{4}$

C. 都小於 $\frac{1}{4}$　　D. 都大於 $\frac{1}{4}$

答案：B

解答：（特殊值）令 $x_1=\dfrac{10}{3}$ ，$x_2=\dfrac{11}{3}$ ，則 $f(3)=f(4)=\dfrac{2}{9}<\dfrac{1}{4}$ ；

令 $x_1=\dfrac{10}{3}$ ，$x_2=\dfrac{7}{2}$ ，則 $f(3)=\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{4}$ ，$f(4)=\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{4}$

二、填空題（每小題 5 分，共 40 分）

9. 若 a 是二次方程 $3x^2-2x-663=0$ 的一個解，則 $(3a^3-664\dfrac{1}{3}a-443)^3=$______ 。

答案：-1

解答：$3a^3=2a^2+663a$，$2a^2=\dfrac{4}{3}a+442$ ，

$\therefore 3a^3-664\dfrac{1}{3}a-443=(2a^2+663a)-664\dfrac{1}{3}a-443$

$=\dfrac{4}{3}a+442+663a-664\dfrac{1}{3}a-443=-1$　　$\therefore$原式$=(-1)^3=-1$

10. 若 $N=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ，則 $N=$_____ 。

答案：1

解答：記 $a=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$ ，則 $a^2=\dfrac{(\sqrt{5}+2)+(\sqrt{5}-2)+2}{\sqrt{5}+1}=2$ ，$\therefore a=\sqrt{2}$

記 $b=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}-1$ ，$\therefore N=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=1$

11. 在△ABC 中，AM、AL、AH 分別是中線、角平分線和高線（點 H 在線段 LB 上），已知：$ML:LH:HB=1:2:3$，則△ABC 三邊邊長之比 $AB:BC:CA=$___:___:___ 。

答案：$5:4\sqrt{3}:7$

解答：不妨設 $BH=3$，$HL=2$，$ML=1$，則 $MC=6$

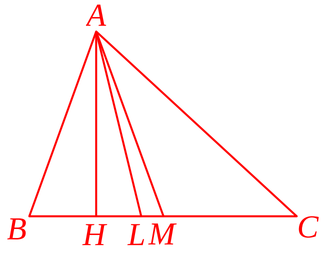
由三角形角平分線性質得：$AB:AC=BL:CL=5:7$

設 $AB=5x$，$AC=7x$，又$\because AH$ 為高，

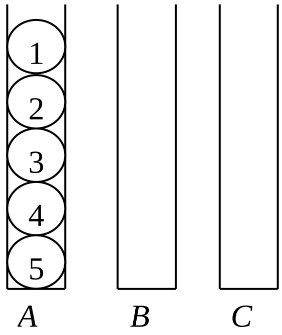
$\therefore AC^2-AB^2=CH^2-BH^2$

$\therefore (7x)^2-(5x)^2=9^2-3^2$ ，$\therefore x^2=3$ ，$x=\sqrt{3}$

$\therefore AB:BC:CA=(5\sqrt{3}):12:7\sqrt{3}=5:4\sqrt{3}:7$



12. 5 個半徑為 r 的小球放入圓筒 A 中，從上到下依次編號為 1、2、3、4、5。A 的底面半徑略大於 r，B、C 是與 A 相同的圓筒，每次允許的操作為：將 A 中最上方的球移入 B 中或者將 B 中最上方的球移入 C 中。問將全部小球移入 C 後，C 中的球有________種不同的排列方式。



答案：42

解答：用 1，2，3，4 的一個排列 $abcd$ 來表示按題目要求操作可得到的排列方式（a 號球在最上方，向下依次為 b、c、d 號球），先拿走 1 號球，將 2、3、4 號球按要求操作容易枚舉出所能得到的排列有：234、243、423、432、342 共 5 種，遞推按 1 號小球最後所能處的位置分類：

（1）1 號小球在最下方，

則有 5 種排列可得：2341、2431、4231、4321、3421；

（2）1 號球在從下至上第 2 個位置，則 2 號球必在其下，可得 2 種排列：3412、4312；

（3）1 號球在從下至上第 3 個位置，則 2、3 兩號球必在其下，得 2 種排列：4123、4132；

（4）1 號球在最上方，可得 5 種排列：1234、1243、1423、1432、1342；

記 n 個小球的排列數為 a_n，從上述計算易見：$a_2=2$，$a_3=5$，$a_4=14$（$a_0=a_1=1$），所求 a_5 按類似方法分類得：

$a_5=1\cdot a_4+1\cdot a_3+a_2\cdot a_2+a_3\cdot a_1+a_4\cdot a_0=14+5+4+5+14=42$

13. 已知 x、y 是互不相同的自然數，且 $x^3+19y=y^3+19x$，$(\sqrt{x^2+y^2})^{2014}$ 的末位數字是_______。

答案：7

解答：條件式因式分解為：$(x-y)(x^2+xy+y^2-19)=0$，$\because x\neq y$，$\therefore x^2+xy+y^2=19$

$\therefore (x+2y)^2+3x^2=76=1+3\times5^2=28+3\times4^2=49+3\times3^2=64+3\times2^2=73+3\times1^2$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ $\quad\therefore (\sqrt{x^2+y^2})^{2014}=13^{1007}=13^{1004}\times13^3$

$\therefore$ 末位數字是 7

14. 已知 a 是質數，x、y 均為整數，則方程$|x+y|+\sqrt{x-y}=a$的解的組數是______。

答案：5

解答：$\sqrt{x-y}$ 為整數，記 $x-y=k^2$，k 為自然數，∴方程變為：$|2y+k^2|+k=a$，

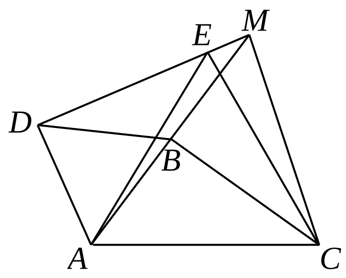
左邊為偶數，∴$a=2$，∴有三種情況共 5 組解：

①$\begin{cases}|x+y|=0\\ \sqrt{x-y}=2\end{cases}$，解為$\begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}$

②$\begin{cases}|x+y|=1\\ \sqrt{x-y}=1\end{cases}$，有兩組解$\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}$

③$\begin{cases}|x+y|=2\\ \sqrt{x-y}=0\end{cases}$，有兩組解$\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$

15. 平面上给定直角三角形 ABC，以其直角邊 $AB=3$ 為邊向△ABC 異側作等邊三角形 ADB，以其斜邊 $AC=5$ 為邊向 △ABC 同側作等邊△AEC，直線 DE、AB 交於點 M，則 $CM=$_____。



答案：5

解答：△ADE≌△ABC，

∴$\angle ADE=90°$，

∴Rt△ADM 是三個內角分別是：60°、90°、30°，

DB 是斜邊中線，∴△CAB≌△CMB，∴$CM=CA=5$

16. 對於任意實數 x、y，記 A 為 $x^2+2y+10$ 與 y^2-y-7x 的較大者。則 A 的最小可能值為_____。

答案：5

解答：$9A\ge7(x^2+2y+10)+2(y^2-y-7x)=7(x-1)^2+2(y+3)^2+45\ge45\Rightarrow A\ge5$

當 $x=1$ 且 $y=-3$ 時，代入計算得：$A=x^2+2y+10=y^2-y-7x=5$

三、簡答題（每小題 10 分，共 20 分，請簡要寫出解答過程）

17. 3×3 的數陣中，要求每個數的絕對值都不超過 1，且全陣中 9 個數之和為 0。

計算數陣中每行或每列的三個數之和，分別記為 r_1、r_2、r_3 及 c_1、c_2、c_3，記

$S=|r_1|+|r_2|+|r_3|+|c_1|+|c_2|+|c_3|$

（1）試給出一種滿足題目要求的構造，使得 S 盡可能大；

（2）指出並證明 S 的最大值。

解答：(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，此時 $S=3+1+2+2+1+1=10$（數陣構造不唯一）

(2) $S_{max}=10$，證明如下：

取絕對值最大的行和與絕對值最大的列和，不妨設為 r_1、c_1，

則必有 r_2、r_3 與 r_1 異號且 $|r_2|+|r_3|=|r_1|$（因為 $r_1+r_2+r_3=0$），

同理 $|c_2|+|c_3|=|c_1|$，$\therefore S=2(|r_1|+|c_1|)$，

設第一行與第一列交匯處的數為 a，

①若 r_1、c_1 同號，不妨設同為正數，

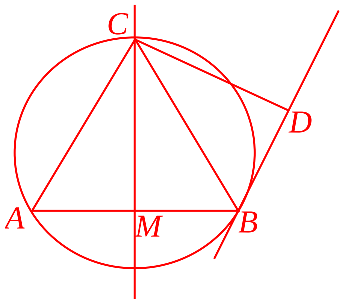
$\because r_1+c_1-a\le4$，$\therefore r_1+c_1\le4+a\le5$，此時 $|r_1|+|c_1|=r_1+c_1\le5$，$S\le10$。

②若 r_1、c_1 異號，則 a 必與 r_1、c_1 之一異號，

可得 $|r_1|+|c_1|=|b+c|+|d+e|\le4$，此時 $S\le8$。

18. $AB=1$ 為固定線段，點 C 在 AB 垂直平分線上運動。對△ABC 作其外接圓，作此圓在點 B 處的切線 l，過點 C 作直線 l 的垂線，垂足記為 D，求 C 運動過程中，點 D 運動軌跡的周長。

答案：π



解答：取 AB 中點 M，

$\because \angle CBD=\angle CAB=\angle CBA$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle CBD\cong \mathrm{Rt}\triangle CBM$，

$\therefore BD=BM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$，

$\therefore$當 C 在 AB 中垂線上運動時，

D 在以 B 為圓心，$\frac{1}{2}$ 為半徑的圓周上運動，

當 C 接近 M 時，D 接近 M，

當 C 接近無窮遠時，D 接近 M 關於 B 的對稱點，

所求軌跡的長度$=2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi$