# 10th IMC International Mathematics Contest (Singapore),2014

## 2014 年第十屆"IMC 國際數學競賽"（新加坡）
## 國中二年級決賽題

**一、選擇題（每小題 5 分，共 40 分）**

1. 若 $3x+by+c=0$ 的圖像與 $cx-2y+12=0$ 的圖像重合，則滿足上述條件的$(b,c)$組數為（　）。　A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 有限個但多於 2

答案：C

解答：$\dfrac{3}{c}=\dfrac{b}{-2}=\dfrac{c}{12}$　$\therefore c^2=36$　$\therefore$滿足條件的 $b$、$c$ 有兩組：$\begin{cases}c=6\\b=-1\end{cases}$，$\begin{cases}c=-6\\b=1\end{cases}$

2. 若 $a$、$b$、$c$、$d$ 都是整數，關於 $x$ 的四個方程 $x+2b=a$，$x+3c=b$，$x+4d=c$，$x+100=d$ 的根都是正數，則 $a$ 的最小值是（　）。

A. 2401　　B. 2432　　C. 2433　　D. 2422

答案：C

解答：依題意得：$\begin{cases}a-2b>0\\b-3c>0\\c-4d>0\\d-100>0\end{cases}$　$\therefore\begin{cases}d\ge 101\\c\ge 4d+1=405\\b\ge 3c+1=1216\\a\ge 2b+1=2433\end{cases}$

3. $P$ lies on the hypotenuse(斜邊)$AB$ of a right-angled triangle(等腰直角三角形) $ABC$. Let $S=AP^2+BP^2$, then which of the following is the correct statement?

A. There are unlimited points $P$ so that $S<2CP^2$.

B. There are limited points $P$ so that $S<2CP^2$.

C. $P$ is the midpoint of $AB$, or one of the endpoints of $A$ or $B$ coincides with the other if and only if $S=2CP^2$.

D. Every point $P$ lies on a straight line $AB$, there exists.

答案：D

解答：取 $AB$ 中點 $M$，當 $P$ 在線段 $AB$ 上時，

$$S=AP^2+BP^2=(AM-PM)^2+(BM+PM)^2$$

$$=AM^2+PM^2-2AM\cdot PM+BM^2+PM^2+2BM\cdot PM=2CM^2+2PM^2=2CP^2$$

當 $P$ 在 $AB$ 延長線上時，類似可得：$S=2CP^2$

4. 若 $\dfrac{1}{1+x_1}+\dfrac{1}{1+x_2}+\cdots+\dfrac{1}{1+x_{2014}}=1$，則在 2014 個正數 $x_1$、$x_2$、…中，(　)。

A. 小於 1 的數僅有 1 個　　B. 肯定有比 2014 大的數

C. 肯定有比 2014 小的數　　D. 必有一數為 2013

答案：C

解答：(1) 令 $x_1=\cdots=x_{2014}=2013$，知 A、B 選項錯誤；

(2) 若 $x_1$、$x_2$、$\cdots\geq 2014$，則 $\dfrac{1}{1+x_1}+\cdots+\dfrac{1}{1+x_{2014}}<\dfrac{2014}{2015}<1$ 矛盾，

故 C 選項正確；

(3) 顯然可調整使 $x_1\sim x_{2014}$ 都不等於 2013，故 D 選項錯誤。

5. 在銳角三角形 $ABC$ 中，邊 $AC$ 和邊 $AB$ 上的高分別為 $BE$ 和 $CF$，$E$、$F$ 為垂足。$BE$ 和 $CF$ 交於 $H$，若 $\angle BAC=60°$，$BC=2$，則 $AH$ 的長為（　）。

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

答案：B

解答：以正三角形為例可得 $AH=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，一般的 $AH=BC\cdot\cot\angle BAC$

6. 8 枚相同的硬幣正面向上排成一排，每次允許將相鄰且正反相同的兩枚硬幣同時翻面，經過若干次操作，所能得到的不同正反排列方式共有（　）種。

A. 128　　B. 70　　C. 64　　D. 50

答案：B

解答：將排列的位置從左至右編號為 1、2、3、…、8，

注意到每次操作保持如下性質不變：

（1）反面朝上的硬幣個數保持為偶數個；

（2）奇數位置上反面朝上的硬幣與偶數位置上反面朝上的硬幣個數保持相等；

反之任何一種滿足上述兩條性質的正反排列都可經有限次操作得到

∴共有：$C_4^0 \cdot C_4^0 + C_4^1 \cdot C_4^1 + C_4^2 \cdot C_4^2 + C_4^3 \cdot C_4^3 + C_4^4 \cdot C_4^4 = 70$

7. Find all positive integers（正整數）$n$ such that $n \le 2014$ and $3^{n-1} \cdot n$ will be a perfect square integer（完全平方數）. A. 33 B. 23 C. 28 D. 29

答案：A

解答：（1）當 $3 \nmid n$ 時，$3^{n-1} \cdot n$ 為完全平方数⇔$n-1$ 為偶數且 $n$ 為完全平方數，

∴$n=1^2$、$5^2$、…、$43^2$ 共 22–7=15 個（奇數平方且扣去 3 的倍數）；

（2）當 $3|n$ 時，不妨記 $n=3^k \cdot m$，$3 \nmid m$，此時 $3^{n-1} \cdot n=3^{n-1+k} \cdot m$

① $k=1$ 時，$m$ 為偶完全平方數且 $3 \nmid m$，

$m=2^2$、$4^2$、$8^2$、$10^2$、…、$22^2$，共 8 個；

② $k=2$ 時，$m$ 為奇完全平方數且 $3 \nmid m$，

$m=1^2$、$5^2$、$7^2$、$11^2$、$13^2$，共 5 個；

③ $k=3$ 時，$m$ 為偶完全平方數且 $3 \nmid m$，$m=2^2$、$4^2$、$8^2$，共 3 個；

類似：④ $k=4$、6 時，$m=1^2$，共 1 個；

⑤ $k=5$ 時，$n=3^5 \cdot 2^2>2014$，無合適的 $n$；

∴滿足要求的 $n$ 共 15+8+5+3+1+1=33 個。

8. 下面四個命題中：

①一組對邊相等且一組對角相等的四邊形是平行四邊形；

②一組對邊相等且一條對角線平分另一條對角線的四邊形是平行四邊形；

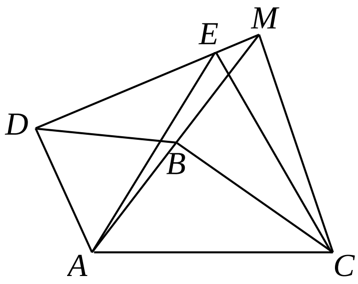
③一組對角相等且這組對角的頂點所連結的對角線被另一對角線平分的四邊形是平行四邊形；

④一組對角相等且這組對角的頂點所連結的對角線平分另一對角線的四邊形是平行四邊形；

其中正確命題有（ ）個。 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案：A

## 二、填空題（每小題 5 分，共 40 分）



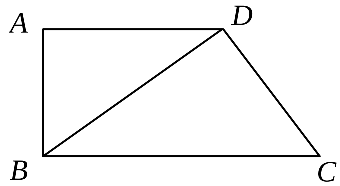

9. 平面上給定直角三角形 $ABC$，以其直角邊 $AB$=3 為邊向△$ABC$ 異側作等邊三角形 $ADB$，以其斜邊 $AC$=5 為邊向△$ABC$ 同側作等邊△$AEC$，直線 $DE$、$AB$ 交於點 $M$，則 $CM$=______ 。

答案：5

解答：△$ADE$≅ △$ABC$，∴∠$ADE$=90°，

∴Rt△$ADM$ 是三個內角分別是：60°、90°、30°，

$DB$ 是斜邊中線，∴△$CAB$≅ △$CMB$，∴$CM$=$CA$=5




10. Refer the diagram at the right. In a right-angled trapezoid（直角梯形）$ABCD$, with $AD//BC$, $\angle A = 90°$, $\angle BDC = 3\angle BDA$. If $CD$=25, $BC$=55, then what is the area of trapezoid $ABCD$? ______.

答案：1236

解答：作∠$ADC$ 的角平分線 $DE$（點 $E$ 在 $BC$ 上）

則△$BED$，△$CDE$ 都是等腰三角形，$CE$=$CD$=25，$BE$=$BC$–$CE$=30

則△$CDE$ 中過 $C$ 點的高 $h_C=\sqrt{25^2-15^2}=20$

∴△$CDE$ 過 $D$ 點的高 $DH=\dfrac{30\times 20}{25}=24$，$CH=\sqrt{25^2-24^2}=7$，$BH$=48

$\therefore S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}\times 24\times(48+55)=1236$

11. 在△$ABC$ 中，$AM$、$AL$、$AH$ 分別是中線、角平分線和高線（點 $H$ 在線段 $LB$ 上），已知 $ML$:$LH$:$HB$=1:1:1，則 $AB$:$BC$:$CA$=____:____:____ 。

答案：$2:3\sqrt{2}:4$

解答：不妨設 $BH$=$LH$=$ML$=1，∴$CM$=3

由角平分線性質得：$AB$:$AC$=$BL$:$CL$=2:4=1:2

設 $AB$=$x$，$AC$=2$x$

∵$AH$ 為高，∴$AC^2-AB^2=CH^2-BH^2$

∴$(2x)^2-x^2=5^2-1^2$，∴$x^2=8$，∴$x=2\sqrt{2}$

$\therefore AB:BC:CA=(2\sqrt{2}):6:4\sqrt{2}=2:3\sqrt{2}:4$

12. Let $a$ and $b$ be real numbers that satisfy $5a^2+2b^2+1=6ab+4a-2b$. Determine $a+b$.______.

答案：2

解答：條件式兩邊同乘以 5 得：$(5a)^2+10b^2-30ab-20a+10b+5=0$

配方得：$(5a-3b-2)^2+(b-1)^2=0$　$\therefore b=1$，$a=1$，$\therefore a+b=2$

13. 已知 $x$、$y$ 是互不相同的自然數，且 $x^3+19y=y^3+19x$，$(\sqrt{x^2+y^2})^{2014}$ 的末位數字是______。

答案：7

解答：條件式因式分解為：$(x-y)(x^2+xy+y^2-19)=0$

$\because x\neq y$　$\therefore x^2+xy+y^2=19$

$\therefore (x+2y)^2+3x^2=76=1+3\times5^2=28+3\times4^2=49+3\times3^2=64+3\times2^2=73+3\times1^2$

$\therefore \begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$　$\therefore (\sqrt{x^2+y^2})^{2014}=13^{1007}=13^{1004}\times13^3$

$\therefore$末位數字是 7

14. 已知 $a$ 是質數，$x$、$y$ 均為整數，則方程 $|x+y|+\sqrt{x-y}=a$ 的解的組數是______。

答案：5

解答：$\sqrt{x-y}$ 為整數，記 $x-y=k^2$，$k$ 為自然數，

$\therefore$方程變為：$|2y+k^2|+k=a$，

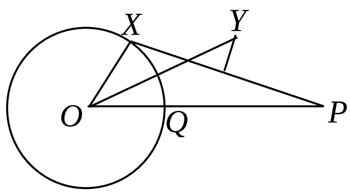
左邊為偶數，$\therefore a=2$，$\therefore$有三種情況共 5 組解：

①$\begin{cases}|x+y|=0\\\sqrt{x-y}=2\end{cases}$，解為 $\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$

②$\begin{cases}|x+y|=1\\\sqrt{x-y}=1\end{cases}$，有兩組解 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$

③$\begin{cases}|x+y|=2\\\sqrt{x-y}=0\end{cases}$，有兩組解 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$

15. 給定兩點 $O$、$P$，$OP=9$，$X$ 為一動點始終在以 $O$ 為圓心，3 為半徑的圓周上運動。$Y$ 是$\angle POX$ 的角平分線與線段 $PX$ 的垂直平分線的交點。$X$ 從線段 $OP$ 上的點出發，運動四分之一個圓周，求此過程中點 $Y$ 的運動路徑與點 $X$ 的運動路徑的長度之比_____。




答案：4:π

解答：$\because OY$ 為$\angle POX$ 的角平分線，

$\therefore \triangle YXO \cong \triangle YQO$（$Q$ 為 $OP$ 與圓周交點）

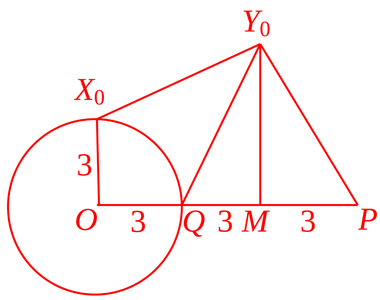
$\therefore YQ=YX$

$\therefore$不論 $X$ 在圓周上何處總有 $YQ=YX=YP$

$\therefore Y$ 點的運動軌跡為 $PQ$ 的中垂線

當 $X=Q$ 時，$Y=M$ 為 $PQ$ 中點，

當 $X=X_0$ 時，$Y=Y_0$ 如右圖，




此時 $X$ 走過的 $QX_0$ 的長度$=\dfrac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 3=\dfrac{3}{2}\pi$

$Y$ 走過的路徑為線段 $Y_0M$

$\because \triangle Y_0OM$ 為等腰直角三角形，$\therefore Y_0M=6$

16. 對於任意實數 $x$、$y$，記 $A$ 為 $x^2+2y+1$ 與 $y^2-4x+10$ 的較大者。則 $A$ 的最小可能值為_____。

答案：3

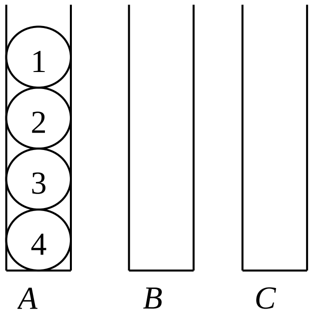
解答：$2A\geq(x^2+2y+1)+(y^2-4x+10)=(x-2)^2+(y+1)^2+6\geq 6\Rightarrow A\geq 3$；

當 $x=2$ 且 $y=-1$ 時，

代入計算得 $A=x^2+2y+1=y^2-4x+10=3$

## 三、簡答題（每小題 10 分，共 20 分，請簡要寫出解答過程）

17. 4 個半徑為 $r$ 的小球放入圓筒 $A$ 中，從上到下依次編號為 1、2、3、4。$A$ 的底面半徑略大於 $r$，$B$、$C$ 是與 $A$ 相同的圓筒，每次允許的操作為：將 $A$ 中最上方的球移入 $B$ 中或者將 $B$ 中最上方的球移入 $C$ 中。問將全部小球移入 $C$ 後，$C$ 中的球有幾種不同的排列方式？




答案：14

解答：用 1，2，3，4 的一個排列 *abcd* 來表示按題目要求操作可得到的排列方式（*a* 號球在最上方，向下依次為 *b*、*c*、*d* 號球），

先拿走 1 號球，將 2、3、4 號球按要求操作容易枚舉出所能得到的排列有：234、243、423、432、342 共 5 種，

遞推按 1 號小球最後所能處的位置分類：

（1）1 號小球在最下方，

則有 5 種排列可得：2341、2431、4231、4321、3421；

（2）1 號球在從下至上第 2 個位置，則 2 號球必在其下，可得 2 種排列：3412、4312；

（3）1 號球在從下至上第 3 個位置，則 2、3 兩號球必在其下，得 2 種排列：4123、4132；

（4）1 號球在最上方，

可得 5 種排列：1234、1243、1423、1432、1342

18. $3\times3$ 的數陣中，要求每個數的絕對值都不超過 1，且全陣中 9 個數之和為 0。計算數陣中每行或每列的三個數之和，分別記為 $r_1$、$r_2$、$r_3$ 及 $c_1$、$c_2$、$c_3$，記 $S=|r_1|+|r_2|+|r_3|+|c_1|+|c_2|+|c_3|$

（1）試給出一種滿足題目要求的構造，使得 $S$ 盡可能大；

（2）指出並證明 $S$ 的最大值。

解答：(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，此時 $S=3+1+2+2+1+1=10$（數陣構造不唯一）

(2) $S_{max}=10$，證明如下：

取絕對值最大的行和與絕對值最大的列和，不妨設為 $r_1$、$c_1$，

則必有 $r_2$、$r_3$ 與 $r_1$ 異號且 $|r_2|+|r_3|=|r_1|$（因為 $r_1+r_2+r_3=0$），

同理 $|c_2|+|c_3|=|c_1|$，$\therefore S=2(|r_1|+|c_1|)$，

設第一行與第一列交匯處的數為 $a$，

①若 $r_1$、$c_1$ 同號，不妨設同為正數，

$\because r_1+c_1-a\le4$，$\therefore r_1+c_1\le4+a\le5$，此時 $|r_1|+|c_1|=r_1+c_1\le5$，$S\le10$。

②若 $r_1$、$c_1$ 異號，則 $a$ 必與 $r_1$、$c_1$ 之一異號，

可得 $|r_1|+|c_1|=|b+c|+|d+e|\le4$，此時 $S\le8$。