10th IMC International Mathematics Contest (Singapore),2014

2014 年第十屆"IMC 國際數學競賽"（新加坡）

國中一年級決賽題

一、選擇題（每小題 5 分，共 40 分）

1. 滿足$(a-b)^2+(b-a)|a-b|=ab$ $(ab\neq 0)$的有理數 a 和 b，一定不滿足的關係是(　　)。

A. $ab<0$　　B. $ab>0$　　C. $a+b>0$　　D. $a+b<0$

答案：A

解答：$\because (b-a)|a-b|\geq -(a-b)^2$　　$\therefore (a-b)^2+(b-a)|a-b|\geq 0$

$\therefore ab\geq 0$，故 $ab<0$ 一定不成立。

2. 已知正整數 a、b、c 中，c 的最大值為 6 且 $a<b<c$，則以 a、b、c 為三邊的三角形共有（　　）。　A. 4 個　　B. 5 個　　C. 6 個　　D. 7 個

答案：D

解答：$\because a$、b、c 為正整數且 $a<b<c$，$\therefore c$ 最小為 4，

當 $c=4$ 時，$a=2$，$b=3$；

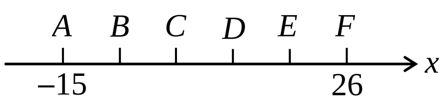
當 $c=5$ 時，$a=2$，$b=4$ 或 $a=3$，$b=4$；

當 $c=6$ 時，$a=2$，$b=5$ 或 $a=3$，$b=4$ 或 $a=3$，$b=5$ 或 $a=4$，$b=5$；

又 c 最大為 6，故共 7 個。

3. 如圖所示，在數軸上有六個點，且 $AB=BC=CD=DE=EF$，則與點 C 所表示的數最接近的整數是（　　）。

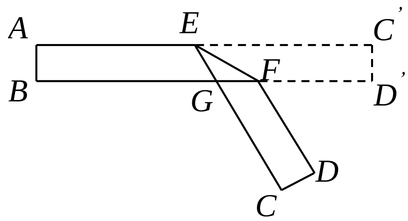
A. –1　　B. 0　　C. 1　　D. 2



答案：C

解答：由圖及已知得 $x_C=-15+\frac{2}{5}\times[26-(-15)]=\frac{7}{5}$　$\therefore$與 C 最接近的整數是 1。

4. Fold two parallel sides of a sheet of paper as shown in the figure such that EF is the crease. If $\angle EFB=30^\circ$, then ①$\angle C'EF=30^\circ$, ②$\angle AEC=150^\circ$, ③$\angle BGE=60^\circ$, ④$\angle BFD=120^\circ$, which of the above conclusions are the correct ones?



A. ① and ③　　B. ①, ② and ③

C. ①, ③ and ④　　D. ①, ② and ④

答案：C

解答：$\angle C'EF=\angle EFB=30^\circ$，①正確；

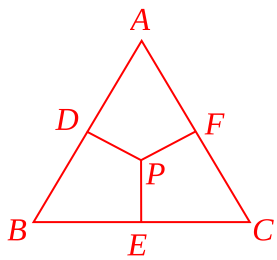
$\angle AEC=180^\circ-(\angle CEF+\angle C'EF)=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$，②錯誤；

$\angle BGE=\angle CEF+\angle EFB=30^\circ+30^\circ=60^\circ$，③正確；

$\angle BFD=180^\circ-\angle CGF=180^\circ-\angle BGE=180^\circ-60^\circ=120^\circ$，④正確。

5. 用一根長為 a 公尺的線圍成一個等邊三角形，測知這個等邊三角形的面積為 b 平方公尺。現在這個等邊三角形內任取一點 P，則點 P 到等邊三角形三邊距離之和為（　）公尺。

A. $\frac{2b}{a}$　　B. $\frac{4b}{a}$　　C. $\frac{6b}{a}$　　D. $\frac{8b}{a}$



答案：C

解答：如圖，$PD\perp AB$ 於 D，$PE\perp BC$ 於 E，$PF\perp AC$ 於 F，則

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}=\frac{1}{2}AB\cdot PD+\frac{1}{2}BC\cdot PE+\frac{1}{2}CA\cdot PF=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot(PD+PE+PF)$$

$$\therefore PD+PE+PF=b\div\frac{a}{6}=\frac{6b}{a}$$

6. 如圖 1，一張四邊形紙片 $ABCD$，$\angle A=50^\circ$，$\angle C=150^\circ$。若將其按照圖 2 所示方式摺疊後，恰好 $MD'//AB$，$ND'//BC$，則$\angle D$ 的度數為（　）。

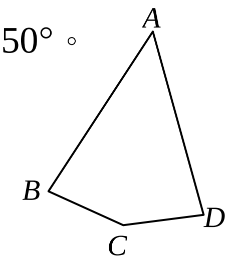


圖 1

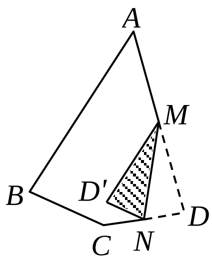


圖 2

A. 70°　　B. 75°　　C. 80°　　D. 85°

答案：C

解答：∵$MD'//AB$，∴$\angle DMD'=\angle A=50°$；

∵$ND'//BC$，∴$\angle DND'=\angle C=150°$；

又∵$\angle D'=\angle D$，∴$\angle D=(360°-50°-150°)\div 2=80°$

7. 在正整數中，不能寫成三個不相等的合數之和的最大奇數是（　）。

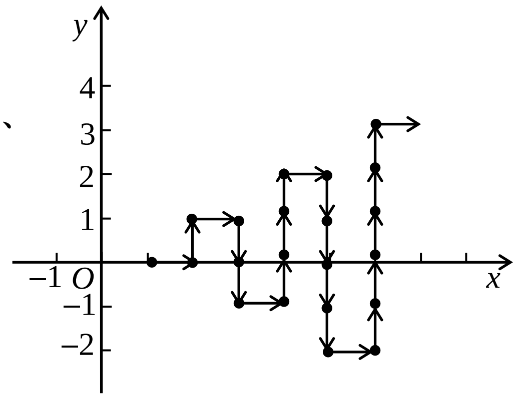
A. 13　　B. 15　　C. 17　　D. 19

答案：C

解答：最小的三個合數是 4、6、8，它們的和是 18，

故符合條件的奇數是 17。

8. 如圖，在平面直角座標系中，有若干個整數點，其順序按圖中“→”方向排列，如(1,0)、(2,0)、(2,1)、(3,1)、(3,0)、(3,–1)…根據這個規律探索可得，點(14,2)是第（　）個點的座標。



A. 100　　B. 99　　C. 101　　D. 102

答案：A

解答：據題意及圖可知，點列中橫座標為 m 的點共有 m 個，

當 m 為偶數時，自下而上排列，m 為奇數時，自上而下排列，

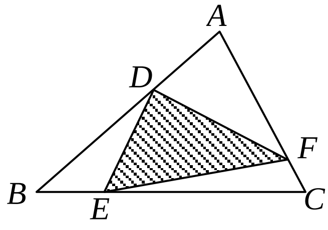
∴前 13 列中共有點 1+2+3+…+13=91 個，

點(14,2)是 14 列中的第 7+2 即 9 個，

∴點(14,2)是第 100 個點的座標。

二、填空題（每小題 5 分，共 40 分）

9. 如圖，△ABC 中，點 D 在 AB 上，$AD=\frac{1}{3}AB$。點 E 在 BC 上，$BE=\frac{1}{4}BC$。點 F 在 AC 上，$CF=\frac{1}{5}CA$。已知陰影部分（即△DEF）的面積是 25cm^2，則△ABC 的面積為______cm^2。



答案：60

解答：$\because AD=\frac{1}{3}AB$，$\therefore BD=\frac{2}{3}AB$，又$\because BE=\frac{1}{4}BC\Rightarrow\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}$

同理：$\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}$，$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}$

$\therefore\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=1-(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{5})=\frac{5}{12}$ $\qquad\therefore S_{\triangle ABC}=25\div\frac{5}{12}=60$

10. m 為正整數，已知二元一次方程組$\begin{cases}mx+2y=10\\3x-2y=0\end{cases}$有整數解，即 x、y 均為整數，

則 $m^2+1=$_____ 。

答案：5

解答：$\begin{cases}mx+2y=10\\3x-2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{10}{3+m}\\y=\frac{15}{3+m}\end{cases}$ $\quad\because m$ 為正整數，$\therefore 3+m$ 為大於 3 的正整

數又$\because x$、y 均為整數 $\quad\therefore 3+m|10$，且 $3+m|15$

$\therefore 3+m=5$ $\quad\therefore m=2$，$m^2+1=5$

11. 已知方程組$\begin{cases}ax-by=4\\3x-y=5\end{cases}$與方程組$\begin{cases}ax+by=6\\4x-7y=1\end{cases}$的解相同，則 $a=$_____，$b=$_____ 。

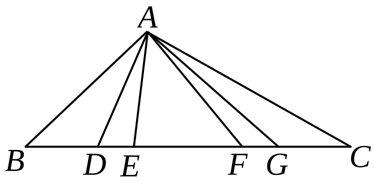
答案：$\frac{5}{2}$、1

解答：$\begin{cases}3x-y=5\\4x-7y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ $\quad\therefore$將 x、y 的值代入得$\begin{cases}2a-b=4\\2a+b=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{2}\\b=1\end{cases}$

12. 在密碼學中，稱直接可以看到的內容為明碼，對明碼進行某種處理後得到的內容為密碼。對於英文，人們將 26 個字母按順序分別對應整數 0 到 25，現有 4 個字母構成的密碼單詞，記 4 個字母對應的數字分別為 x_1、x_2、x_3、x_4，已知：整數 x_1+2x_2、$3x_2$、x_3+2x_4、$3x_4$ 除以 26 的餘數分別為 9、16、23、12，則密碼的單詞是_____。

解答：由題意設：$\begin{cases} x_1+2x_2=26m+9 \\ 3x_2=26n+16 \\ x_3+2x_4=26s+23 \\ 3x_4=26t+12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=7 \\ x_2=14 \\ x_3=15 \\ x_4=4 \end{cases}$ ∴密碼為 *hope*

13. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，D、E、F、G 均為 BC 邊上的點，且 $BD=CG$，$DE=GF=\frac{1}{2}BD$，$EF=3DE$，若 $S_{\triangle ABC}=1$，則圖中所有三角形的面積之和為_____。



答案：7

解答：圖中三角形均為以 A 為頂點的等高三角形，設 $DE=FG=1$，

則 $BD=CG=2$，EF=3　∵$S_{\triangle ABC}=1$，∴$h=1\div(2+1+3+1+2)=\frac{1}{9}$

∴所有三角形底邊之和=2+3+6+7+9+1+4+5+7+3+4+6+1+3+2=63

∴所有三角形面積之和=$63\times\frac{1}{9}=7$

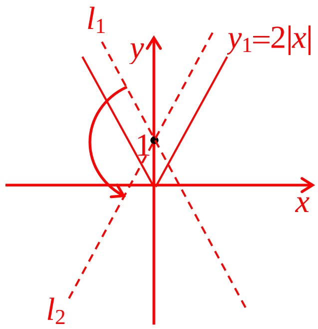
14. 使關於 x 的方程 $2|x|=ax+1$ 同時有一個正根和一個負根的所有整數 a 的值之和是_____。

答案：0

解答：如圖，l_1 為過(0,1)點斜率為-2 的直線，l_2 為過(0,1)點斜率為 2 的直線，設 $y_1=2|x|$，$y_2=ax+1$，

由圖可知，當 y_2 斜率$-2<a<2$ 時，滿足題意，

即 $a=-1$、0 或 1，∴$-1+0+1=0$



15. 如果 6 個不同的正整數 m、n、p、q、r、s 滿足$(9-m)(9-n)(9-p)(9-q)(9-r)(9-s)=-36$，那麼 $m+n+p+q+r+s=$______。

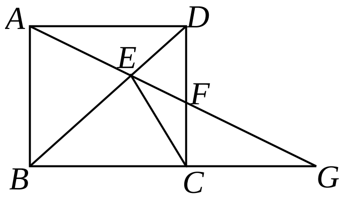
答案：54

解答：將–36 分解為 6 個不同的整數：–1、1、–2、2、–3、3

$\therefore 9-m$、$9-n$、$9-p$、$9-q$、$9-r$、$9-s$ 與以上六個數一一對應

$\therefore m+n+p+q+r+s=54$

16. 如圖，正方形 $ABCD$ 中，點 E 是對角線 BD 上的一點，AE 的延長線交 CD、BC 的延長線分別於點 F、G，若 $CE=CG$，則 $\dfrac{CF}{GE}=$______；$\dfrac{CG}{AB}=$______。



答案：$\dfrac{1}{3}$、$\sqrt{3}-1$

解答：$\because E$ 在正方形對角線 BD 上

$\therefore$易得$\triangle ABE\cong\triangle CBE$，$\therefore \angle BCE=\angle BAE$

$\because CE=CG$，$\therefore \angle CEG=\angle G$，$\therefore \angle BCE=2\angle G$，$\therefore \angle BAE=2\angle G$

又由 $AD//BC$ 得$\angle G=\angle DAF$

$\therefore \angle BAE=2\angle DAF$

$\because \angle BAE+\angle DAF=90°$，$\therefore \angle DAF=30°$，$\therefore \angle G=30°$，$\therefore FG=2CF$

又$\because \angle BAE=\angle BCE$，$\therefore \angle ECF=\angle DAF$

$\therefore \angle ECF=\angle CEG$，$\therefore CF=EF$

$\therefore GE=3CF$，$\therefore \dfrac{CF}{GE}=\dfrac{1}{3}$

利用 $\dfrac{CF}{AB}=\dfrac{CG}{BG}$ 得 $\dfrac{CG}{AB}=\sqrt{3}-1$

三、簡答題（每小題 10 分，共 20 分，請簡要寫出解答過程）

17. 一間玩具工廠用於生產的全部勞力為 450 個工時，原料為 400 個單位。生產一隻小熊要使用 15 個工時、20 個單位的原料，售價為 80 元；生產一隻小貓要使用 10 個工時、5 個單位的原料，售價為 45 元。在勞力和原料的限制下合理安排生產小熊、小貓的個數，可以使小熊和小貓的總售價盡可能高。請你用所學過的數學知識分析，總售價是否可能達到 2200 元。

答案：安排生產小熊 14 個，小貓 24 個，可能達到總售價 2200 元

解答：設小熊和小貓的個數分別為 x 和 y，總售價為 z，則

$z=80x+45y=5(16x+9y)\cdots$①

根據勞力和原材料的限制，

x 和 y 應滿足 $15x+10y\le 450$，$20x+5y\le 400$

化簡為 $3x+2y\le 90\cdots$②，$4x+y\le 80\cdots$③

當總售價 $z=2200$ 時，由①得 $16x+9y=440\cdots$④

③×9 得：$36x+9y\le 720\cdots$⑤

⑤–④得：$20x\le 720-440=280$，即 $x\le 14$

②×$\frac{9}{2}$ 得：$\frac{27}{2}x+9y\le 405\ldots$⑥

④–⑥得：$\frac{5}{2}x\ge 440-405=35$，即 $x\ge 14$

$\therefore x=14$，代入④求得 $y=24$

當 $x=14$，$y=24$ 時，

有 $3x+2y=90$，$4x+y=80$ 滿足工時和原料的約數條件，

此時恰有總售價 $z=80\times 14+45\times 24=2200$（元）。

18. 有依次排列的 3 個數：3、9、8，對任意相鄰的兩個數，都用右邊的數除以左邊的數，所得的商寫在這兩個數之間，可產生一個新數串：3、3、9、$\frac{8}{9}$、8，這稱為第一次操作；做第二次同樣的操作後也可產生一個新數串：3、1、3、3、9、$\frac{8}{81}$、$\frac{8}{9}$、9、8，繼續依次操作下去，問：從數串 3、9、8 開始操作第 100 次後所產生的那個新數串的所有數之積是多少？

答案：$\frac{8^{101}}{3^{97}}$

解答：一個依次排列的 n 個數組成一個數串：a_1、a_2、a_3、⋯、a_n

設依次操作後得新數串：$\frac{a_2}{a_1}$，$\frac{a_3}{a_2}$，$\frac{a_4}{a_3}$，…，$\frac{a_n}{a_{n-1}}$

∴新增數之積為：$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_n}{a_1}$

原數串為 3 個數：3、9、8

∴新增 2 項之積為：$3\times\frac{8}{9}=\frac{8}{3}$

第 2 次操作後所得數串為：3、1、3、3、9、$\frac{8}{81}$、$\frac{8}{9}$、9、8

∴新增 4 項之積為：$1\times3\times\frac{8}{81}\times9=\frac{8}{3}$

按這個規律下去，第 100 次操作後所得新數串所有數的積為：

$$3\times9\times8\times(\frac{8}{3})^{100}=\frac{8^{101}}{3^{97}}$$