



10th IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2014
2014 年第十屆"IMC 國際數學競賽" (新加坡)
小學六年級決賽題

一、選擇題 (每小題 5 分，共 40 分)

1. Find the sum of all the first 9 digits right after the decimal point (小數點) in the computation of $0.\underbrace{11\dots11}_{(2014)} \times 0.\underbrace{11\dots11}_{(2014)}$. A. 35 B. 36 C. 37 D. 38

答案：C

解答： $0+1+2+3+4+5+6+7+9=37$

2. 某商家專售 A、B 兩種商品，A 商品定價是 B 商品定價的 2 倍，現在商家期望促銷回籠資金，於是 A 商品 8 折優惠，B 商品 9 折優惠。某顧客一次性買了 10 件 A 商品、5 件 B 商品，結果一共比原價低 90 元，那麼顧客實際花了 () 元。 A. 410 B. 450 C. 500 D. 510

答案：A

解答：設 A 商品原價格“ $200a$ ”，B 商品原價格“ $100a$ ”；

優惠了 $10 \times 200a \times 0.2 + 5 \times 100a \times 0.1 = 450a = 90$ ， $a = 0.2$

故實際花了 $(10 \times 200a + 5 \times 100a) - 90 = 500 - 90 = 410$ 元。

3. 將 6 枚硬幣正面朝上排成一行，每次操作，可將兩枚相鄰且朝向相同的硬幣同時翻轉，那麼經過若干次操作後，不會出現的情況是 ()。
- A. 正反正正反正 B. 反正反反正反 C. 反反正正反反 D. 正反反正反反

答案：C

解答：略

4. 在 2014 右端補上一個兩位數 M ，形成一個六位數，這個六位數除以 M 所得餘數為 N ，如果 $M+N=100$ ，那麼 M 不會是下面的哪個數 ()。
- A. 55 B. 61 C. 66 D. 70

答案：D

解答：由 $201400+M\equiv 100-M(\pmod{M})$ ，知 $201300\equiv 0(\pmod{M})$

故 $M|201300=2^2\times 3\times 5^2\times 11\times 61$ ，又 $M>50>N$ ，

故 $M=61、66、55、75、60$ ，共 5 種可能，沒有 70。

5. Draw a circle inside a sector (扇形) of radius (半徑) 3cm whose angle measures 60° and meets the sector at three different point.

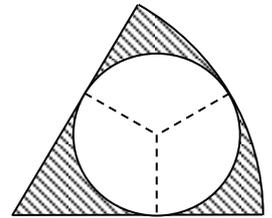
What is the area of the shaded region in cm^2 ?

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{3\pi}{4}$

D. π



答案：B

解答：易知 $S_{\text{小圓}}=1^2\pi(\text{cm}^2)$ ， $S_{\text{扇形}}=3^2\pi\div 6=1.5\pi(\text{cm}^2)$ ；

故陰影面積為 $1.5\pi-\pi=0.5\pi(\text{cm}^2)$ 。

6. 十幾個朋友聚會做遊戲，從 1 開始大家順次輪流報數，報到含有數字 7 的或者能被 7 整除的自然數時要隔過去，否則將會受罰。如果輪了幾圈，排在最後的一人恰好報 100，這個過程中始終都沒有人被罰，那麼做遊戲的人數為 () 人。 A. 11 B. 12 C. 14 D. 17

答案：C

解答：帶 7 的 $10\div 7=1$ 個；

7 的倍數共 $[100\div 7]=14$ 個；重複 (帶 7 的 7 倍)

3 個 (7、70、77)；故可以報的數共 $100-19-14+3=70$ 個；

$70=5\times 14$ ，故共有 14 人做遊戲。

7. One of the three students Rose, Sandra and Teresa won a gold medal in the Final round of IMC. They predictions before the competition, but only one of them made the correct prediction. Which of the following statements given by three students could be used to determine who among them won the gold medal?

A. Rose say "It is Teresa," Sandra say "It is Rose," Teresa say "It is Sandra."

B. Rose say "It is not Teresa," Sandra say "It is not Rose," Teresa say "It is Sandra."

C. Rose say "It is me," Sandra say "It is Rose," Teresa say "It is not me."

D. Rose say "It is Teresa," Sandra say "It is not me," Teresa say "It is not Rose."

答案：C

解答：A. 三人都有可能說對，則結論不定；

B. Rose 說對則是 Rose，Sandra 說對則是 Teresa，故無法判斷；

C. Teresa 說對了，不是 Rose，不是 Teresa，可判斷是 Sandra；

D. Sandra 說對則是 Rose，Teresa 說對則是 Sandra，故無法判斷。

8. 某電商搞了一次網購湊單大賽，只限購買三種單價分別為 53 元、160 元、370 元的商品，每種商品都要買，訂單總價恰湊成 2014 元者享受特殊優惠，那麼不同的訂單共有（ ）種。 A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

答案：B

解答：三種商品數量設為 x 、 y 、 z 件；

$53x+160y+370z=2014=53\times 38$ ；易見 $x=8、18$ 或 28 ， $1\leq y\leq 8$ ， $1\leq z\leq 3$ ，

$x=8$ 時， $16y+37z=53\times 3$ ， $y=z=3$ ；

$x=18$ 時， $16y+37z=53\times 2$ ， $y=z=2$ ；

$x=28$ 時， $16y+37z=53\times 1$ ， $y=z=1$ ；

共有 3 組解，即 3 種訂單。

二、填空題（每小題 5 分，共 40 分）

9. 計算： $\frac{1}{\frac{1}{184} + \frac{1}{874} + \frac{1}{2014}} =$ _____。（結果用帶分數表示）

答案： $141\frac{1}{3}$

解答：分母= $\frac{1}{8\times 23} + \frac{1}{23\times 38} + \frac{1}{38\times 53} = \frac{1}{15} \times (\frac{1}{8} - \frac{1}{53}) = \frac{3}{8\times 53}$ ；

原式= $\frac{8\times 53}{3} = \frac{424}{3} = 141\frac{1}{3}$

10. 計算： $1\times(2^2+3)+2\times(3^2+4)+\dots+8\times(9^2+10)=$ _____。

答案：2016

解答：原式 $= (2-1)(2^2+2+1) + (3-1)(3^2+3+1) + \cdots + (9-1)(9^2+9+1)$
 $= (2^3-1) + (3^3-1) + \cdots + (9^3-1) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 9^3 - 9$
 $= (1+2+3+\cdots+9)^2 - 9 = 2016$

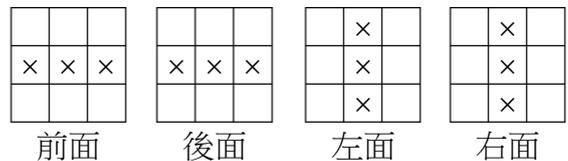
11. 將 1~9 每個數字用一次，填入算式“ $\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square}$ ”，要求每個帶分數的真分數部分都是最簡分數，且算式結果最大，那麼算式的結果為_____。

答案： $26\frac{1}{12}$

解答：整數部分用 7、8、9，分母用 2、4、6，分子用 1、3、5；

即 $7\frac{1}{2} + 8\frac{3}{4} + 9\frac{5}{6} = 26\frac{1}{12}$ 。

12. 將 27 個邊長為 1cm 的小正方體，粘合成一個大正方體，如圖，將前後面中間一行取下，左右面中間一列取下，那麼剩下的立體圖形表面積為_____cm²。



答案：62

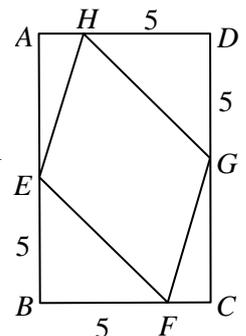
解答：原表面積 $6 \times 3^2 = 54\text{cm}^2$ ；

先取消前後兩行，表面積增加 $6 \times 2 - 4 \times 1 = 8\text{cm}^2$ ；

再取消左右兩列，表面積增加 $4 \times 2 - 4 \times 2 = 0\text{cm}^2$ ；

故剩下圖形的表面積為 62cm^2 。

13. Rectangle $ABCD$ in scribed a parallelogram (平行四邊形) $EFGH$ so that $BE=BF=DH=DG=5\text{cm}$. If the area of parallelogram is 40cm^2 , then what is the perimeter (周長) of rectangle $ABCD$ in cm? _____ cm.



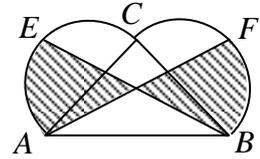
答案：36

解答：設 $AH=CF=x$ ， $AE=CG=y$ ，矩形周長 $2(x+y)+4\times 5$ ；

$$S_{\text{平四} EFGH}=(x+5)(y+5)-xy-5^2=5(x+y)=40 \text{ (cm}^2\text{)}；$$

故 $x+y=8$ ，矩形周長為 $2\times 8+20=36 \text{ (cm)}$ 。

14. 如圖， AC 、 BC 是兩個半圓的直徑，均為 4cm ，且 $\angle ACB=90^\circ$ ， E 是弧 AC 的中點， F 是弧 BC 的中點，那麼連接 AF 與 BE 後，形成的陰影面積總和為_____ cm^2 。($\pi=3.14$)

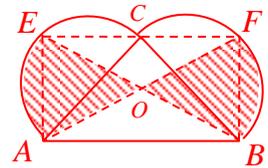


答案：10.28

解答：(1) 連接 AE 、 EF 、 FB 即可看出陰影面積與空白面積相同；

$$(2) \text{ 總面積} = 4^2 \div 2 + 2^2 \pi = 8 + 4\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$(3) \text{ 陰影面積} = (8 + 4\pi) \div 2 = 4 + 2\pi = 10.28 \text{ (cm}^2\text{)}$$



15. 將 1~5 這 5 個數字各一次組成兩個整數，一個是 6 的倍數，一個是 9 的倍數，但不能既是 6 倍又是 9 倍（例如：132 和 45 可以，132 和 54 不可以），那麼共有_____種不同的組成方式。

答案：14

解答：考慮數字和 $1+2+3+4+5=15=6+9$ ，只能組成兩位數和三位數；

(1) 9|三位數（奇），6|兩位數（偶），則三位數字和為 $9=5+3+1$ ，兩位數字和為 $6=2+4$ ；有 $A_3^3 \times A_2^2 = 12$ 種組成方法；

(2) 6|三位數（偶），9|兩位數（奇），則三位數字和為 $6=1+2+3$ ，兩位數字和為 $9=5+4$ ；有 $A_2^2 \times 1 = 2$ 種組成方法；

綜上，共有 $12+2=14$ 種組成方法。

16. 甲、乙兩個足夠聰明的人參加“最強心算”對決。主持人讀題：請猜一個兩位數，這個數能被 7 整除。我還有兩張提示卡，各寫有一個數，一個代表兩位數字之和，另一個代表兩位數字之積，你們各抽一張，自己分析”。甲、乙看了各自抽到的提示數後，都搖了搖頭說：“猜不出”，但聽了對方話後，馬上同時說“我知道了”，結果兩人同時報對了答案，那麼這個兩位數是_____。

答案：91

解答：

兩位數	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98
數字和	5	3	10	8	6	13	11	9	7	14	12	10	17
數字積	4	2	16	15	8	36	30	18	0	49	32	9	72
	猜出	猜出				猜出	猜出		猜出	猜出	猜出		猜出

(1) 填寫提示數，根據出現的唯一性（陰影），

兩人看到的數可能是 8、9、10；

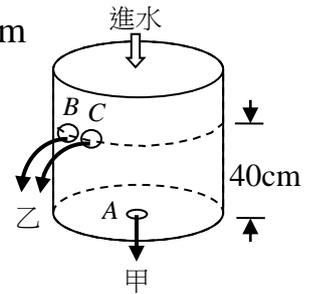
(2) 由於兩人開始都不知道，故一個看到了 9，一個看到了 10，對應質數為 91。

三、簡答題（每小題 10 分，共 20 分，請簡要寫出解答過程）

17. 一個高 70cm 的大水箱在底部開有一個出水孔 A，距底 40cm

高處開有兩個出水孔 B、C，出水孔 A 直接對著甲容器，出水孔 B、C 直接對著乙容器。已知每個出水孔排水速度相同，甲、乙兩容器大小相同，現在從頂部給水箱灌水，

36 分鐘後水箱和兩容器剛好同時滿水，那麼如果關閉所有出水孔，直接給水箱灌水需要幾分鐘才會灌滿？



答案：28

解答：設 $V_{\text{孔}}=1$ 份/分， $V_{\text{進}}=n$ 份/分，

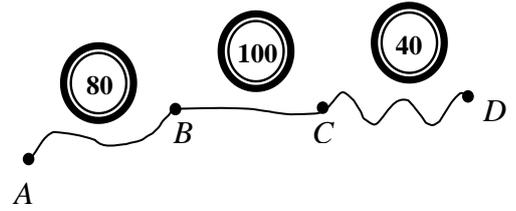
下 40cm 灌水用時 t_1 分鐘，上 30cm 灌水用時 t_2 分鐘；

由於相同容器同時注滿， $2 \times t_2 = 1 \times (t_1 + t_2)$ ，故 $t_1 = t_2 = 18$ 分鐘-----2 分

又 $\frac{t_2(n-3)}{t_1(n-1)} = \frac{30}{40}$ ，故 $\frac{n-3}{n-1} = \frac{3}{4}$ ，解得 $n=9$ ；-----4 分

關閉出水孔灌水需要 $\frac{18 \times (9-1) + 18 \times (9-3)}{9} = 28$ （分鐘）。-----4 分

18. 一條 48 公里長的公路上有三條等長的限速段 AB 、 BC 、 CD ，限速標誌如圖（單位：公里/時），最高設計時速為 2 倍關係的快、慢



兩車分別從 A 、 D 同時出發，到達對方出發點立即返回。在盡量快速行駛下，快車剛開過 C 不久就第一次遇到慢車，並返回過 C 點 11.5 公里第二次遇到慢車，那麼慢車的最高設計時速為多少公里？（限速地段不得超過所標速度）

答案：60

解答：設慢車最高時速 x 公里，快車最高時速 $2x$ 公里，則

(1) 易知 $40 < x < 80$ ，否則相遇地點位置不對；-----2 分

(2) 第二次相遇時，

$$\text{慢車用 } \frac{16}{40} + \frac{16}{x} + \frac{16}{x} + \frac{16}{x} + \frac{16-11.5}{x} = 0.4 + \frac{105}{2x} \text{ 時；-----2 分}$$

如果 $2x < 100$ ，則快車用 $\frac{16}{80} + \frac{16}{2x} + \frac{16}{40} + \frac{16}{40} + \frac{11.5}{2x} = \frac{55}{4x} + 1$ 時，

$$\frac{55}{4x} + 1 = 0.4 + \frac{105}{2x} \text{，解得 } x = \frac{775}{12} > 50 \text{，矛盾；-----2 分}$$

如果 $2x > 100$ ，則快車用 $\frac{16}{80} + \frac{16}{100} + \frac{16}{40} + \frac{16}{40} + \frac{11.5}{100} = 1\frac{11}{40}$ 時，

$$0.4 + \frac{105}{2x} = 1\frac{11}{40} \text{，解得 } x = 60 > 50 \text{；}$$

因此，慢車最高時速為 60 公里/時。-----4 分