10th IMC International Mathematics Contest (Singapore),2014
2014 年第十屆"IMC 國際數學競賽"（新加坡）
小學五年級決賽題

一、選擇題（每小題 5 分，共 40 分）

1. 用 27 去除 2014 所得的結果中小數部分的循環節各位數字之和為（　　）。

A. 14　　B. 15　　C. 16　　D. 17

答案：C

解答：相當於 $16 \div 27 = 0.\overline{592}$，$5+9+2=16$。

2. 某開發商要蓋一棟 201.4 公尺高的摩天大樓，每層高度 5.3 公尺，在設計樓層號時，要規避數字 4 以及 13 的整數倍編號，如果樓層號從 1 開始，那麼最後一層的編號為（　　）。

A. 55　　B. 56　　C. 57　　D. 58

答案：C

解答：共 $201.4 \div 5.3 = 38$（層），編號 1~50 中，帶 4 的數有 4、14、24、34、40~49 共 14 個，13 倍有 13、26、39，共 3 個；

實際只有 $50-14-3=33$ 層，還差 5 層；

51、52（捨）、53、54（捨）、55、56、57，故最後一層編號為 57。

3. 在 2014 右端補上一個一位數字 a，形成一個五位數 $\overline{2014a}$，如果 $\overline{2014a}$ 除以 a 所得餘數與 a 的和恰為 10，那麼 a 為（　　）。

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

答案：B

解答：設這個數字為 a；$20140+a \equiv 10-a \pmod{a}$，得 $20130 \equiv 0 \pmod{a}$，

即 $a | 20130 = 2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 61$，易知 $a > 5$，故 $a = 6$。

4. 在方格表中的 3×5 區域內染色，分別可以得到 I、M、C 的字樣（如圖 1），現在將字母 I 繞中心順時針旋轉 90°，重新染色（如圖 2），將這兩幅圖對齊疊加成一幅圖，並擦去重疊格的顏色，那麼重疊圖中共有（　　）個染色格。

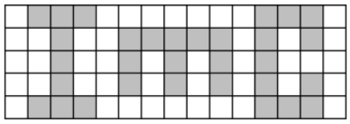


圖 1

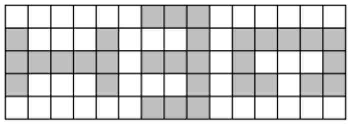
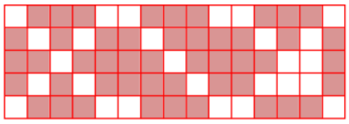


圖 2

A. 46　　　B. 48　　　C. 50　　　D. 52

答案：B

解答：設每個字母旋轉後的外輪廓都相同，$5^2-4=21$ 格；



I 字內部空出 5 格；M 字內部空出 3 格；

C 字內部空出 7 格；故共有 $21\times3-5-3-7=48$ 格染色。

5. 編號為 1、2、3 的三個足夠大的水瓶，盛水分別為 800ml、1000ml、900ml，現在按一個固定的比例將 1 號瓶中的一部分水倒給 2 號瓶，再將 2 號瓶中的一部分水倒給 3 號瓶，最後再將 3 號瓶中的一部分水倒給 1 號瓶，結果三瓶中水量相同了，那麼這個固定的比例是（　　）。

A. $\frac{1}{2}$　　　B. $\frac{1}{4}$　　　C. $\frac{1}{5}$　　　D. $\frac{1}{8}$

答案：B

解答：設固定比例為 $\frac{1}{k}$，第一瓶水倒出 $\frac{800}{k}$，得到 $\frac{900}{k-1}$，最後增加了 100ml；

驗證 $\frac{900}{k-1}-\frac{800}{k}=100$，即可得 $k=4$。

6. Four students *A*, *B*, *C* and *D* are debating on what day of the week is today.

A say, "Today is Saturday."　　　*B* say, "Yesterday is Sunday."

C say, "*A*, *B* didn't say it correctly."　　　*D* say, "*B*, *C* didn't say it correctly."

Actually, there are only two students tell the truth. What day of the week is tomorrow?

A. Sunday　　　B. Monday　　　C. Tuesday　　　D. can not be determined

答案：A

解答：A 與 B 的說法互相矛盾，至少有一人錯誤；D 否認了 C，故 C、D 不能都是對的，至少有一人錯誤；可見 A 和 B 為一對一錯，故 C 錯，D 對，進而 A 對，B 錯；故明天是周日。

7. 將 5 枚硬幣正面朝上排成一行，每次操作，可將兩枚相鄰且朝向相同的硬幣同時翻轉，那麼經過若干次操作後，5 枚硬幣的朝向可能會出現的情況為（　）。 A. 反反反正正　B. 正反正反正　C. 正正反正反　D. 反正正反正

答案：D

解答：反向總是偶數個，先排除 A，2 個反時，間隔必須是偶數，故 D 選項正確。

8. 老師讓一名聰明的學生猜一個兩位質數，並告訴他："我有兩張卡片，一張寫有這個數的數字和，一張寫有這個數的數字積，你可以抽一張看，但需要自己判斷卡片上的數代表什麼。" 甲抽到後說："真不走運，這張猜不出，要是抽另外一張就能猜出來了。" 甲抽到的數可以是下列中的哪一個（　）。

A. 7　B. 8　C. 10　D. 11

答案：D

解答：(1) $7=1+6=3+4=1\times7$，可能對應 17、71，即使抽另一張（8）也猜不出

(2) $8=1+7=3+5$，可能對應 17、71，即使抽另一張（7）也猜不出

(3) $10=1+9=3+7$，可能對應 37、73，即使抽另一張（21）也猜不出

(4) $11=2+9=3+8=4+7$，對應質數 29、83、47，另一張為 18、24、28 這些數的數字積都是唯一的，且只能作為數字積，故看到後一定可以猜出；因此甲看到的數可以是 11。

二、填空題（每小題 5 分，共 40 分）

9. 數列 $\frac{2}{1\times3}$、$\frac{4}{3\times7}$、$\frac{8}{7\times15}$、$\frac{16}{15\times31}$、…，滿足一定的規律，那麼當分子出現為 1024 時，所有項的總和為__________。

答案：$\dfrac{2046}{2047}$

解答：原式$=\dfrac{2}{1\times3}+\dfrac{4}{3\times7}+\dfrac{8}{7\times15}+\cdots+\dfrac{1024}{1023\times2047}$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{1023}-\frac{1}{2047}=1-\frac{1}{2047}=\frac{2046}{2047}$$

10. 有 n 個不同的數，但它們的平方恰是 1~100 中的非完全平方數（例如：平方是 2 的數，平方是 3 的數，平方是 5 的數，平方是 6 的數⋯）那麼這 n 個數的整數部分相加得到的和是_________。

答案：570

解答：整數部分為 k 的平方為 $k^2+1\sim(k+1)^2-1$，共 $2k$ 個；

整數部分總和$=1\times2+2\times4+\cdots+9\times18=2\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2)=570$。

11. 有 2013 張卡片，分別寫著 2~2014 中的一個自然數，每張各不相同。甲乙二人玩一個遊戲，規定甲先乙後輪流取卡片，一次取走 1 張，當剩下 2 張卡片時，如果上面寫的數是互質數的，則甲勝；否則乙勝。如果甲要確保勝利，第一張卡片有_________種選取方法。

答案：1007

解答：2~2014 中，共有 1006 個奇數，1007 個偶數；

甲必需先取 1 個偶數，否則乙總取奇數，最後剩下兩個偶數一定不互質；故甲共有 1007 種取法。

12. 從 1~9 中挑選六個數字，填入算式“$\dfrac{\square}{\square}+\dfrac{\square}{\square}+\dfrac{\square}{\square}$”中，要求三個分數相加結果最小，那麼算式的結果為_________。（不要求填最簡分數）

答案：$\dfrac{61}{84}$

解答：分母用 7、8、9，分子用 1、2、3；無論如何填，三個分數的乘積固定，故應該讓三個分數盡量平均才能使和最小；

故 1/7、2/8、3/9 最佳，即 $\frac{1}{7}+\frac{2}{8}+\frac{3}{9}=\frac{1}{7}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{61}{84}$。

13. 一張卡片上寫有一個三位數，正著看這個數能被 6 整除，但不能被 9 整除，將紙片旋轉 180°後再看，發現它變成了一個新三位數，且能被 9 整除，但不能被 6 整除（例如 606 旋轉後為 909 可以，但 666 既是 6 倍又是 9 倍，故不行），那麼卡片上所寫的三位數正著看最大為_________。

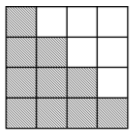
答案：618

解答：只能用 0、1、6、8、9 組成，首位只能 1、6，個位只能 8、6；

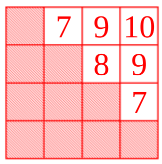
6_6，反過來 9_9，只能 606/909；

6_8，反過來 8_9；可以是 618/819；故最大值 618。

14. The diagram at the right is a 4×4 grid which contain several rectangles(矩形). How many rectangles are there that contain the shaded portion and also those contained which contain the unshaded portion? _________.



答案：50



解答：[解法一]全部矩形共 $C_5^{\,2}\times C_5^{\,2}=100$ 個；

只包含空白格的矩形共有 15 個；

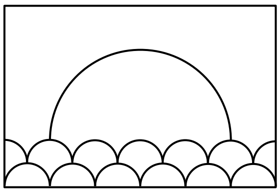
只包含陰影格的矩形共有 35 個；

故共有 100−15−35=50 個即含陰影又含空白。

[解法二]或為以圖中標數格作為右上角的矩形，個數如所標，

故共 10+9×2+7×2+8=50 個。

15. 一位小朋友用兩種的半圓弧畫了一幅“日出“的圖畫，已知紙張的長為 60cm，小半圓代表海水（第二行兩邊各是四分之一圓弧），大半圓代表太陽，兩端恰落在兩個小半圓弧的中點，現在要為太陽和海水著色，那麼著色部分的總面積為________cm^2。



答案：1206.5

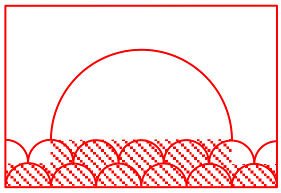
解答：易見小圓半徑為 $60\div6\div2=5(cm)$，大圓半徑為 $4\times5=20(cm)$；

其中直線形部分面積為 $60\times5+40\times5=500(cm^2)$；

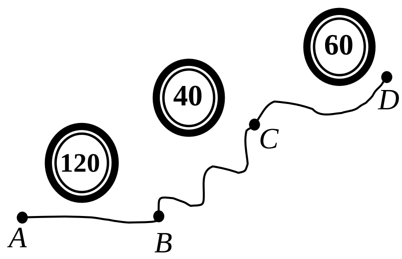
四個小扇形湊成一個小圓，面積為 $5^2\pi=25\pi(cm^2)$；

一個大半圓面積為 $20^2\pi\div2=200\pi(cm^2)$；

故染色面積為 $500+225\pi=1206.5(cm^2)$。



16. 一條 90 公里長的公路上有三條等長的限速段 AB、BC、CD，限速標誌如圖（單位：公里/時），最高設計時速相同的兩車分別從 A、D 同時相向出發，在盡量快速行駛下，兩車在距 B 地 18 公里處相遇，那麼兩車的最高時速為________公里。（限速地段不得超速）



答案：100

解答：設最高時速為 x 公里，

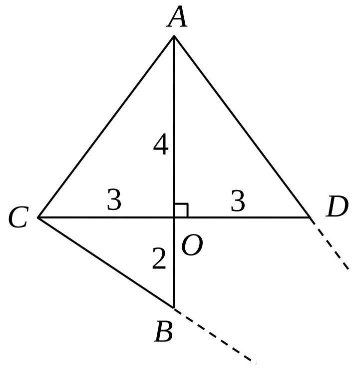
(1) $x>60$，否則在 BC 中點相遇；

(2) BC 段兩車速度相同，時間差 $\frac{18-12}{30}=\frac{1}{5}$ 時，

故 AB 上實際車速為 $30\div(\frac{30}{60}-\frac{1}{5})=100<120$，故 $x=100$。

三、簡答題（每小題 10 分，共 20 分，請簡要寫出解答過程）

17. *AB* and *CD* are two line segments of equal length that are perpendicular（垂直）to each other at point *O* as shown at the right. If *AO*=4, *BO*=2 and *CO*=*DO*=3, then what is the area of that triangle that formed by the extension of line segments *AD* and *CB*?



答案：36

解答：設 *AD* 與 *CB* 交於 *E*，

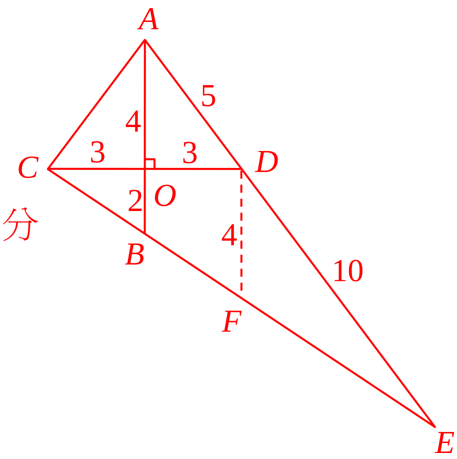
[解法一]作 *DF*//*AB* 交 *CE* 於 *F*，

則 *DF*=2*OB*=4；------2 分

DE:*AE*=*DF*:*AB*=2:3，*AE*=3*AD*；------4 分

$S_{\triangle ACD}$=4×6÷2=12；------2 分

$S_{\triangle ACE}$=3$S_{\triangle ACD}$=3×12=36。------2 分



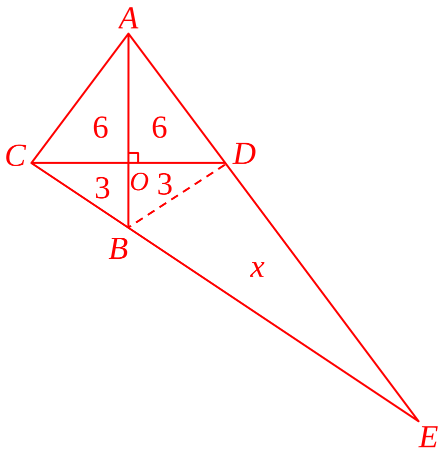
[解法二]連接 *BD*，

則 $S_{\triangle ACO}=S_{\triangle ADO}$=3×4÷2=6，$S_{\triangle BCO}=S_{\triangle BDO}$=3×2÷2=3，------2 分

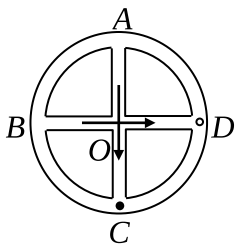
設 $S_{\triangle EBD}=x$，則 $\dfrac{AD}{DE}=\dfrac{S_{\triangle CAD}}{S_{\triangle CDE}}=\dfrac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle BDE}}$，------2 分

即 $\dfrac{12}{x+6}=\dfrac{9}{x}$，解得 x=18；-----4 分

因此 $S_{\triangle ACE}$=2×(6+3)+18=36。------2 分



18. 如圖，長為 80cm 的環形軌道上有黑、白兩個小球，黑球順時針出發，白球逆時針出發，A、B、C、D 為四個等分點，A、C 之間有一條瞬間移位隧道，小球運動到 A 點就會被瞬間（時間忽略不計）吸到 C 點，然後調轉原時針方向運動，B、D 之間也如此。已知白球速度為 4cm/秒、黑球速度為 3cm/秒，那麼當白球第 2014 次到 C 點時，黑球的位置距離 D 點幾公分？（小球之間不會發生碰撞）



答案：25

解答：白球路線 $D \Rightarrow A(C) \Rightarrow B(D)$循環，

黑球路線 $C \Rightarrow B(D) \Rightarrow A(C)$循環；----2 分

第 1 次到 C	白球走 20cm	黑球走 15cm（BC 之間）
第 2 次到 C	白球走 60cm	黑球走 45cm（BC 之間）
第 3 次到 C	白球走 100cm	黑球走 75cm（AD 之間）
第 4 次到 C	白球走 140cm	黑球走 105cm（AD 之間）------2 分
第 5 次到 C	白球走 180cm	黑球走 135cm（BC 之間）同第一次---2 分

2014÷4=503⋯2，4 次一循環，相當於第二次；----2 分

黑球走 45 公分，相當於走 5 公分，

距 C 點 5 公分，距 D 點 25 公分。-----2 分