



10th IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2014
2014 年第十屆"IMC 國際數學競賽" (新加坡)
小學四年級決賽題

一、選擇題 (每小題 5 分, 共 40 分)

1. 一個數列的前四項為 2、0、1、4，從第 5 項開始，每一項都是它前面所有數之和，例如：第五項為 $2+0+1+4=7$ ，第六項為 $2+0+1+4+7=14$ ，那麼這個數列第 2014 項的個位數字為 ()。

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

答案：B

解答：每項的個位數字只受前面項的個位數字影響；

列出個位數字規律 2、0、1、4、7、4、8、6、2、4、8、6、2、 \dots ，4 項一循環；故第 $(2014-5) \div 4 = 502 \dots 1$ ，相當於循環節中的第 1 個，即個位數字為 4。

2. 8 月 2 日可以寫成 0802，如果類似寫法中四個數字恰好為 2、0、1、4，合理的日期有 () 個。

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

答案：B

解答：0124、0214、0412、0421、1024、1204；共 6 個。

3. 某開發商蓋了一棟大樓，樓層編號為 1~30，但是其中規避了帶有數字 4，以及是 13 的倍數的編號，那麼這棟大樓的實際層數是 ()。

A. 25 B. 26 C. 27 D. 28

答案：A

解答：1~30 中，帶 4 的數共有 4、14、24，共 3 個，

13 倍有 13、26，共 2 個；故共有 $30-3-2=25$ 層。

4. What is the sum of all the digits in final result when $1+11+111+\dots+\underbrace{11\dots11}_{(10)}$ is computed? A. 37 B. 45 C. 46 D. 55

答案：A

解答：

$$\text{原式} = (9+99+999+\dots+\underbrace{99\dots99}_{10\text{個}9}) \div 9 = (\underbrace{11\dots110}_{10\text{個}1} - 10) \div 9 = \underbrace{11\dots1100}_{9\text{個}1} \div 9 = 1234567900$$

數字和 $1+2+3+4+5+6+7+9=37$ 。

5. 現有兩張 5×15 的透明格紙，分別給一些格染上不透明的顏色，可以橫著（如圖 1）或者豎著（如圖 2）看出 I、M、C 的字樣，將這兩張紙對齊疊加（相同字母中心對齊）後，還可以看出（ ）個透明格。

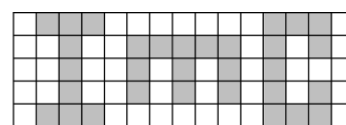


圖 1

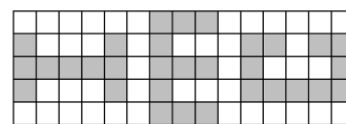


圖 2

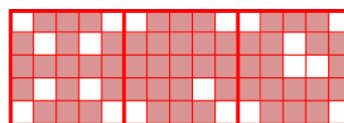
- A. 18 B. 20 C. 22 D. 24

答案：B

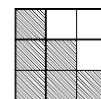
解答：每個 5×5 的 4 角透明，

內部分別為 4、1、3 格透明；

故共有 $4 \times 3 + 4 + 1 + 3 = 20$ 格染色。



6. 在 3×3 的方格表中可以數出很多矩形（長方形和正方形），其中只含陰影格的矩形比只含空白格的矩形多（ ）個。



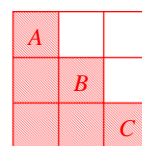
- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

答案：C

解答：陰影格比空白格多出 A、B、C 三格，

且它們不出現在同一個矩形中；

故矩形增加：含 A 的 3 個；含 B 的 4 個；含 C 的 3 個；共 10 個。



7. 老師安排了一次特殊的考試，共 10 道題目，分兩種作答模式，安全模式下每題正確得 10 分，錯誤不得分，冒險模式下每題正確得 20 分，錯誤倒扣 5 分，每道題自選模式作答，不答不得分。已知某人最後得到 95 分，那麼他最多有（ ）道題目選擇了冒險模式。

- A. 10 B. 9 C. 8 D. 7

答案：C

解答：冒險 10 次，5 對 5 錯，得 75 分 < 95 分，6 對 4 錯，

得 100 分 > 95 分；

冒險 9 次，5 對 4 錯，得 80 或 90 分 < 95 分，6 對 3 錯，

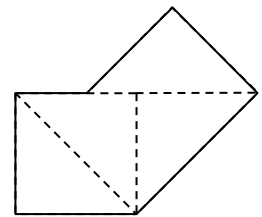
得 105 或 115 分 > 95 分；

冒險 8 次，5 對 3 錯，安全 1 對 1 錯，

可以得到 $5 \times 20 - 3 \times 5 + 1 \times 10 + 1 \times 0 = 95$

分；故最多冒險 8 次。

8. Assemble a hexagon (六邊形) using four right-angled isosceles triangles (等腰直角三角形) where each has an area of 2cm^2 as shown in the figure. What is the perimeter of the hexagon?



- A. 5cm B. 10cm
C. 12cm D. not integer in terms of cm

答案：C

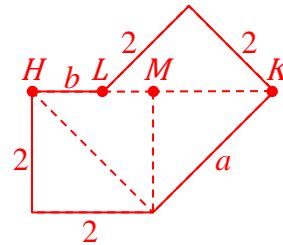
解答：設等腰直角三角形的邊長為 x 公分，

$$x \cdot x \cdot 1/2 = 2, x = 2$$

$$\overline{MK} + \overline{HM} = 2 + 2 = 4,$$

$$\overline{KL} + \overline{LH} = \overline{MK} + \overline{HM} = 4 = a + b$$

$$2 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12 \text{ cm}$$



二、填空題（每小題 5 分，共 40 分）

9. 右圖是一個加法豎式，請將 0~9 中除 2、0、1、4 外的另 6 個數字分別填入“□”中（各用一次），“○”中所填數字不受限制，那麼這個算式結果四位數最小為_____。

$$\begin{array}{r} 2 \square \square \\ \square 0 \square \\ + \square \square 1 \\ \hline \square \square \square 4 \end{array}$$

答案：1184

解答：相當於 $201 + \square\square\square + \square\square\square = 1\square\square 4$ ，

個位湊 13，百位盡量用最小的數字，3 和 5； $13 = 6 + 7$ ，十位剩 $9 + 8 = 17$ ；

$296 + 507 + 381 = 1184$ 。

10. In the number sentence $\overline{ABCD} \times C = \overline{AABDD}$, each letter represents a different digit. What is the value of \overline{ABCD} ? _____.

答案：2495

解答：(1) $C \times A$ 接近 $10 \times A \Rightarrow A < 5, C > 5$ ；

(2) $C \times CD \Rightarrow$ 末兩位 DD ；符合情況只有， $D=5, C=9, 9 \times 95=855$ ；

$B \times 9 + 8$ 個位還是 $B, B \times 8 + 8$ 個位是 0， $B=4$ ；

$A \times 9 + 4 = A \times 11, A=2$ ；故原式為 $2495 \times 9 = 22455$ 。

11. 由 0、1、2、4 各一次組成不同的純小數（例如：0.124 可以，0.2 或 2.014 不行），那麼所有這些小數的平均數為_____。

答案：0.259

解答：這些數共有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 個；

十分位 1、2、4 各出現 2 次；百分位 1、2、4 各出現 2 次；

千分位 1、2、4 各出現 2 次；總和為 $(1+2+4) \times 2 \times 0.111 = 1.554$ ；

平均為 $1.554 \div 6 = 0.259$ 。

12. 已知： $A = 1 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + 3 \times 4^2 + \dots + 9 \times 10^2$ ， $B = 1^2 \times 2 + 2^2 \times 3 + 3^2 \times 4 + \dots + 9^2 \times 10$ ，那麼 $A - B =$ _____。

答案：330

解答： $A - B = 1 \times 2 \times (2 - 1) + 2 \times 3 \times (3 - 2) + 3 \times 4 \times (4 - 3) + \dots + 9 \times 10 \times (10 - 9)$

$= 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 9 \times 10 = 9 \times 10 \times 11 \div 3 = 330$

13. 將 240ml 水分別灌入三個容積都是 120ml 的瓶子，一瓶灌滿，另兩瓶各灌一部分（不滿也不空）。現在從滿瓶中倒出一部分給另兩瓶，使它們的水量各增加 1 倍（如果會超過滿瓶，則倒滿即可），倒完後發現三瓶中的水量從多到少和原來分佈一樣，那麼未灌滿的兩瓶水原來相差_____ml。

答案：40

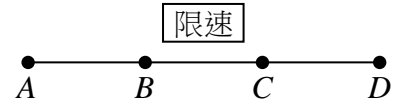
解答：已知另兩瓶不會相等，不妨設為 A 瓶 $> 60\text{ml}$ ， B 瓶 $< 60\text{ml}$ ； A 瓶將變為 120ml， B 瓶將變為 2 倍 $= A$ 瓶原有，原來的滿瓶變為 B 瓶原有；

由 $A、B$ 原共有 120ml，又 $A = 2 \times B$ ，故 A 瓶 80ml， B 瓶 40ml，

相差 40ml。

三、簡答題（每小題 10 分，共 20 分，請簡要寫出解答過程）

17. 一條 360 公里長的公路上有三條等長的路段 AB 、 BC 、 CD ，其中 BC 段有限速標誌。現有最高時速 100 公里和 60 公里的快、慢兩車分別從 A 、 D 同時相向出發，在盡量快速行駛下，2.4 小時後兩車相遇，那麼 BC 段限制最高時速為多少公里？（限速路段不得超過所限速度行駛）



答案：80

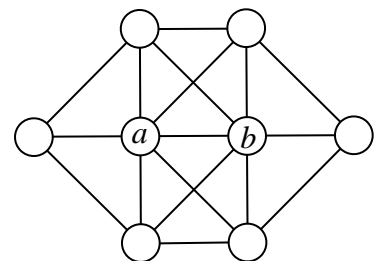
解答：(1) 估算平均速度 $360 \div (2.4 \times 2) = 75$ 公里/時，

如果 BC 段限速 ≤ 60 公里/時，則平均速度 $\leq 360 \div (120 \div 100 + 240 \div 60) < 75$ ；因此 BC 段限速 > 60 公里/時；-----2 分

(2) 相遇時慢車共走了 $60 \times 2.4 = 144$ 公里，快車共走了 $360 - 144 = 216$ 公里；-----4 分

快車 AB 段用 $120 \div 100 = 1.2$ 時， BC 段用 $2.4 - 1.2 = 1.2$ 時，故限速 $(216 - 120) \div 1.2 = 80$ 公里/時。-----4 分

18. 圖中一共有五個正方形（兩大兩中一小），現在將數字 1~9 中任選 8 個分別填入圖中的八個圓圈內。要求除小正方形外，每個正方形頂點上的四個圓圈內所填數字之和都相同，且都等於最長線段（水平）上的四個圓圈內所填數之和，那麼 $a \times b$ 最大是多少？（過程給出一種填法即可）



答案：30（答案 4 分，填圖用對 2~9 給 2 分，滿足條件再給 4 分）

解答：設每個相等的和為 n ，填入數字總和 S ，僅統計兩個大正方形可得 $2n = S$ ， S 最大 44（不用 1）， $n = 22$ ，再統計兩個中正方形和最長線段，可得 $a + b = (3n - S) \div 2 = 11$ ，從而 $c + d = e + f = c + d = 11$ ； $11 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$ ，乘積最大 $5 \times 6 = 30$ ；具體填法如下圖。

