Ninth IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2013

2013 年第九屆"IMC 國際數學競賽"（新加坡）
國中三年級決賽試題

一、選擇題 (每題 5 分，共 40 分)

1. For any value of x, what kind of integer is the value of algebraic expression $x^2+8x+17$?

   A. negative numbers　　B. positive numbers

   C. zero　　D. Uncertain

2. 滿足下列條件，一定全等的一對三角形是(　　)。

   A. 有一組角及一組邊對應相等的兩個等腰三角形

   B. 有兩組邊對應相等的兩個直角三角形

   C. 面積相等的兩個三角形

   D. 有兩組角及其中一組角的對邊對應相等的兩個三角形

3. Let the length of three sides of $\triangle ABC$ represented as a, b, c satisfy the condition $2b=a+c$ and the length of three altitudes to three sides denoted as h_a, h_b, h_c. Which of the following represent the relationship of those three altitudes?

   A. $2h_b = h_a + h_c$　　B. $\dfrac{2}{h_b} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_c}$

   C. $\dfrac{h_b}{h_a} = \dfrac{h_c}{h_b}$　　D. None of the above

4. 已知凸 n 邊形所有內角度數都是整數且各不相同，則 n 的最大值為(　　)。

A. 24　　B. 25　　C. 26　　D. 27

5. 圓內兩條互相垂直的弦其中一條弦被垂足分成長為 3、4 的兩段，另一弦被垂足分成長為 6、2 的兩段，則此圓的直徑為(　　)。

A. $2\sqrt{15}$　　B. $3\sqrt{7}$　　C. 8　　D. $\sqrt{65}$

6. 以下給出的是△ABC 的三個內角度數，其中第(　　)組對應的三角形無法劃分成為 3 個腰長一樣的等腰三角形。

A. $(50^\circ,60^\circ,70^\circ)$　　B. $(50^\circ,50^\circ,80^\circ)$

C. $(45^\circ,45^\circ,90^\circ)$　　D. $(20^\circ,20^\circ,140^\circ)$

7. 在凸四邊形$ABCD$中，$\angle ABC=30^\circ$，$\angle BCD=60^\circ$，$BC=8$，$CD=1$，$S_{ABCD}=\dfrac{13\sqrt{3}}{2}$，則 AB 的長為(　　)。

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

8. 已知3個實數a、b、c，滿足$a+b+c=a^2+b^2+c^2=2$，則代數式$\dfrac{(1-a)^2}{bc}+\dfrac{(1-b)^2}{ca}+\dfrac{(1-c)^2}{ab}$的值為(　　)。

A. 3　　B. –3　　C. 1　　D. 不確定，隨 a、b、c 的不同取值而變

二、填空題 (每題 5 分，共 40 分)

9. 已知實數 a、b、c、d 兩兩不等，滿足$(a+c)(a+d)=1=(b+c)(b+d)$，則 $(a+c)(b+c)=$ ________ 。

10. 寫出 $1+2^{21}+4^{21}$ 的一個素因數：________ 。

11. If the two bases of a trapezoid are 3 units and 4 units, one line segment parallel to two bases and subdivided the trapezoid into two smaller trapezoids of equal area, then what is the length of that segment? ______.

12. If real numbers a、b satisfy $\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{36-12a+a^2}=10-|b+3|-|b-2|$, then what is the maximum value of a^2+b^2?______.

13. 求方程 $x+\dfrac{2013}{x}=[x]+\dfrac{2013}{[x]}$ 的所有非整數解為________ 。(其中$[x]$為取整函數，表示不超過 x 的最大整數值)

14. $f(x), g(x)$ 是兩個二次函數且二次項係數都為1，已知方程 $f(g(x))=0$ 的四個根是2010、2011、2012、2013，而方程 $g(f(x))=0$ 的四個根是–2010、–2011、–2012、–2013；則這兩個二次函數的最小值之積為_______ 。

15. 對一個數列a_1、a_2、…、a_n進行一次"冒泡排序"是指如下系列操作：首先比較數列中第一項a_1與第二項a_2的大小，若$a_1 > a_2$則交換這兩項在數列中的位置(即交換a_1、a_2的數值)，否則數列的所有項都保持不變；接著比較現在數列中第二項與第三項的大小，按照同樣的規則，若$a_2 > a_3$則交換，否則不變；接著比較第三項與第四項的大小如此等等…，直至最後比較a_{n-1}與a_n的大小並按規則交換位置後結束；現將1、2、3、4、…、2013隨機排列成一個2013項的數列，對此數列進行一次"冒泡排序"操作，則所得的數列第10項恰是初始數列的第5項的概率為________。

16. 在等腰△ABC中，$\angle A = 100^\circ$，$AB = AC$，在△ABC內存在一點P，滿足$PB = AB$，$\angle ABP = 2\angle ACP$，則$\angle APB =$________。

三、解答題 (每題 10 分，共 20 分)

17. BD、CE是△ABC的角平分線，點B、C分別在邊AC、AB上，分別作$\angle ABD$、$\angle ACE$的角平分線，設所作兩條角平分線相交於點P，O是銳角△ABC的外心，若已知B、P、O、C 四點共圓，且 PB=PC，求△ABC的三個內角度數。

18. 對三元陣列(A,B,C)可進行以下變換：

變換1：可將三個數進行任意重新排列；

變換2：可將(A,B,C)變換成$(2B+2C-A,B,C)$；

假設初始狀態給定的三元陣列為$(-1,0,1)$；

(1)能否可經有限步變換，得到三元陣列$(2012,2013,2014)$；並說明理由；

(2)能否可經有限步變換，得到三元陣列$(2009,2010,2011)$；並說明理由；

(3)已知可經有限步變換，得到三元陣列$(1,2024,x)$，求 x 的所有可能取值，並說明理由。

2013 年第九屆九年級解答

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9
答案	B	D	B	C	D	C	C	A	–1
題號	10			11	12	13	14	15	16
答案	73、649657、92737			$\frac{5\sqrt{2}}{2}$	45	$-\frac{671}{15}$	1	$\frac{1}{110}$	80°

17. 解：

記$\triangle ABC$三內角為$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$；

角平分線的角度計算可得：$\angle BPC=\dfrac{\angle BDC+\angle BEC}{2}=45^\circ+\dfrac{3}{4}\angle A$；

(1)若$\angle A$為銳角，由外心張角計算可得：$\angle BOC=2\angle A$，

故 B、P、O、C 四點共圓若且唯若$\angle BPC=\angle BOC$，若且唯若$\angle A=36^\circ$；由 PB = P 可知 P 為弧 BO 的中點，故

$\angle BCP=\dfrac{3}{4}\angle C=\dfrac{1}{2}\angle BCO=27^\circ$，$\therefore \angle C=36^\circ$，$\angle B=108^\circ$。

(2)若$\angle A$為直角或鈍角，由外心張角計算可得：

$\angle BOC=360^\circ-2\angle A$，故 B、P、O、C 四點共圓若且唯若

$\angle BPC+\angle BOC=180^\circ$，解得$\angle A=180^\circ$，不合題意要求。

18. 解：

(1) $A+B+C$ 的奇偶性在變換 1、2 下保持不變；故 $1+0+(-1)=0$ 為偶數，不可能得到 2012+2013+2014 為奇數。

(2) $A+B+C(\mathrm{mod}4)$在變換 1、2 下或者保持不變；

或者變為$-(A+B+C)(\mathrm{mod}4)$；故 $1+0+(-1)=0(\mathrm{mod}4)$，不可能得到 $2013+2014+2015=2(\mathrm{mod}4)$。

(3) 構造： $(-1,0,1)\to(0,1,3)\to(1,3,8)\to(1,8,15)\to(1,15,24)\to\cdots\cdots$

$\to\left(0,44^2-1=1935,45^2-1=2024\right)\to\left(0,45^2-1,46^2-1=2115\right)$ 。

故 x 可取值為 1935 或 2115；要說明這就是 x 的所有可能取值，需要構造(全局)不變量，由二次方程的韋達定理，可得代數式 $A^2+B^2+C^2-2AB-2BC-2CA$ 的值在題目的變換下保持不變。