Ninth IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2013

2013年第九屆"IMC國際數學競賽"（新加坡）
國中二年級決賽試題

一、選擇題（每題5分，共40分）

1. 已知$a+\frac{1}{a}=3$，則$a^2+\frac{1}{a^2}$的值為(　　)。

   A. 1　　B. 7　　C. 9　　D. 11

2. 滿足下列條件，一定全等的三角形是(　　)。

   A. 有一組角及一組邊對應相等的兩個等腰三角形
   B. 有兩組邊對應相等的兩個直角三角形
   C. 面積相等的兩個三角形
   D. 有兩組角及其中一組角的對邊對應相等的兩個三角形

3. If a, b, c are three distinct real numbers, A, B, C are three distinct points with coordinates A(b+c,a), B(c+,b), C(a+b,c), then the location of these three coordinates will form what kind of relation?

   A. they will form an obtuse triangle (鈍角三角形)
   B. they will form an acute triangle (銳角三角形)
   C. they will form a right-angled triangle (直角三角形)
   D. they does not constitute a triangle

4. 若直線$y=2x-1$與$y=x-k$的交點在第四象限，則k的取值範圍是(　　)。

   A. $k<0.5$　　B. $k>1$　　C. $0.5<k<1$　　D. 以上都不對

5. 正 n 邊形的內角度數均為整數，那麼 n 的取值種數為(　　)。

A. 10　　B. 20　　C. 21　　D. 22

6. How many four-digit number such as $\overline{aabb}$ (where each letter can only represent one digit) is a perfect square number (完全平方數) are there?

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

7. 將一個正方形不重不漏的劃分成 4 個凸多邊形，設劃分而得的 4 個凸多邊形邊數分別為 a、b、c、d，且滿足 $a>b>c>d\geq 3$，那麼有序四元正整數組 (a,b,c,d) 可以是(　　)。

①. (6,5,4,3)　　②. (7,6,5,4)　　③. (7,6,4,3)　　④. (7,5,4,3)

A. ① ②　　B. ② ③　　C. ① ④　　D. ③ ④

8. 已知 $N=1+2^{15}+4^{15}$，以下(　　)是的 N 質因數。

A. 13　　B. 43　　C. 53　　D. 73

二、填空題 (每題 5 分，共 40 分)

9. 已知一次函數 $y=kx+b$ 的圖像過點 $P(3,2)$，且與直線 $x+3y-9=0$ 及 x 軸圍成底邊在 x 軸上的等腰三角形，則該一次函數的解析式為_____。

10. Let real number a, b satisfy $a^3+b^3+3ab=1$. What are the possible sum of a and b? ______ . (Write all the possible values.)

11. 若實數 x 滿足 $x+\frac{2013}{x}=[x]+\frac{2013}{[x]}$ (其中$[x]$為取整函數，表示不超過 x 最大整數值)，那麼 x 的非整數取值為______。(用假分數表達)

12. 已知實數a、b滿足$\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{36-12a+a^2}=10-|b+3|-|b-2|$，則$a^2+b^2$的最大值為_________。

13. Let *a*, *b*, *c*, *d* be four distinct real numbers that satisfy $(a+c)(a+d)=(b+c)(b+d)=1$. Determine the value of $(a+c)(b+c)=$ _________.

14. 方程組 $\begin{cases} x^2-y^2=3(xz+yz+x+y) \\ y^2-z^2=3(yx+zx+y+z) \\ z^2-x^2=3(zy+xy+z+x) \end{cases}$ 的解(x,y,z)共有________組。

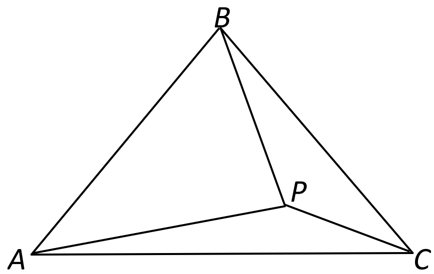
15. 對一個數列a_1、a_2、…、a_n進行一輪“冒泡排序”是指如下系列操作：首先比較數列中第一項a_1與第二項a_2的大小，若$a_1>a_2$則交換這兩項在數列中的位置 (即交換a_1、a_2的數值)，否則數列的所有項都保持不變；接著比較現在數列中第二項和第三項的大小，按照同樣的規則，若$a_2>a_3$則交換，否則不變；接著比較第三項和第四項的大小如此等等....直至最後比較a_{n-1}和a_n的大小並按規則交換位置後結束，現將 1、2、3、…、10000 隨機排列成一個 10000 項的數列，對此數列進行一輪“冒泡排序”操作，則所得的數列第 5000 項恰是 2013 的概率為__________。

16. 設函數$f(x)=\left|\cdots\left|\left|x^{10}-2^{2013}\right|-2^{2012}\right|-\cdots-2^2\right|-2\right|$，則$f(2013)=$________。

三、解答題 (小題 10 分，共 20 分)

17. 甲隨機的從數位1至9中選3個數並把它們按高位數位大低位元數位小的方式排成一個三位數，乙隨機的從數字1至8中選3個數也按照同樣的方式得到一個三位元數，則事件“甲得到的數比乙的大”發生的概率為多少？

18. 等腰ΔABC中，$BA=BC$，$\angle ABC=80°$，P為三角形內一點，滿足$\angle PAC=10°$，$\angle PCA=20°$，證明：$\angle ABP=60°$。



2013 年第九屆八年級解答

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	D	C	D	B	C	D
題號	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	$y=\frac{1}{3}x+1$	1 或−2	$-\frac{671}{15}$	45	−1	8	$\frac{1}{10000}$	1

17. 解：

(1)任選方法數 $C_9^3\times C_8^3$ 種；

(2)情況 1，甲選了 9，乙任選：$C_8^2\times C_8^3$ 種；

情況 2，甲沒選 9：則甲乙所排三位數或相等或不等，不等中

甲大甲小各占一半；故有 $\dfrac{C_8^3\times C_8^3-C_8^3}{2}$ 種；

故總概率為：$\dfrac{C_8^2\times C_8^3+\dfrac{C_8^3\times C_8^3-C_8^3}{2}}{C_9^3\times C_8^3}=\dfrac{C_8^2+\dfrac{C_8^3-1}{2}}{C_9^3}=\dfrac{28+\dfrac{55}{2}}{84}=\dfrac{37}{56}$ 。

18. 證明：

(1)如下圖，作三角形的對稱軸 BD，延長 CP 交 BD 於點 G，

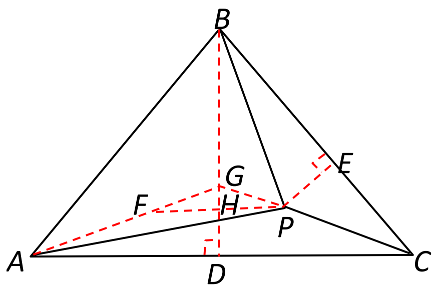
連接 AG，過 P 作 $PF\perp BD$，交 AD 於 F，交 BD 於 H；

(2)由對稱性，$\angle GAC=\angle GCA=20°$，

$\therefore$ AP 是$\angle GAC$ 的平分線，

$\because$ $PF//AC$，$\therefore\angle FPA=\angle CAP=\angle FAP$

$\therefore$ $FP=FA$；



(3)再由對稱性，$FP=FA=PC$

∴ $PH=\frac{1}{2}PF=\frac{1}{2}PC$ ；

(4)過點 P 作 $PE\perp BC$ 於 E

∵ 在 Rt$\triangle PEC$ 中$\angle PCB=30°$

∴ $PE=\frac{1}{2}PC$

∴ $PE=PH$，故 BP 為$\angle CBD$ 的平分線；

(5)再由 BD 平分$\angle ABC$

∴ $\angle ABP=\angle ABD+\angle PBD=\frac{1}{2}\times 80+\frac{1}{4}\times 80=60°$。