



Ninth IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2013
2013 年第九屆"IMC 國際數學競賽" (新加坡)
國中一年級決賽試題

一、選擇題 (每題 5 分，共 40 分)

1. 化簡 $\frac{2^{n+4} - 2^{n+1}}{2^{n+4}}$ 得()。

- A. $2^{n+1} - \frac{1}{8}$ B. -2^{n+1} C. $\frac{7}{8}$ D. $\frac{7}{4}$

2. 已知 $b > a > 0$ ， $a^2 + b^2 = 4ab$ ，則 $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$ 等於()。

- A. 2 B. 3 C. 2 或 3 D. 無法確定

3. If $ac < 0$, then how many of the following inequalities $\frac{a}{c} < 0$ ， $ac^2 < 0$ ，

$a^2c < 0$ ， $c^3a < 0$ ， $ca^3 < 0$ will satisfy the given condition?

- A. 1 個 B. 2 個 C. 3 個 D. 4 個

4. 已知 $25^x = 2000$ ， $80^y = 2000$ ，則 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 等於()。

- A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

5. Let a, b, c be positive numbers. If $x = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$, then what is the determine the value of x ?

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

6. 如果 $|x| + ||x| - 1| = 1$ ，那麼()。

- A. $(x+1)(x-1) > 0$ B. $(x+1)(x-1) < 0$
 C. $(x+1)(x-1) \geq 0$ D. $(x+1)(x-1) \leq 0$

7. 設 $S = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + \frac{2^3}{5 \times 7} + \dots + \frac{2^{49}}{97 \times 99}$, $T = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2^2}{7} + \dots + \frac{2^{48}}{99}$, 則 $S - T = ()$ 。

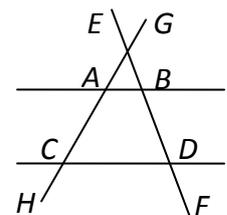
- A. $\frac{2^{49}}{99}$ B. $1 - \frac{2^{49}}{99}$ C. $\frac{2^{49}}{99} - 1$ D. $\frac{2^{49}}{99} + 1$

8. 若 a, c, d 是整數， b 是正整數，且滿足 $a+b=c$, $b+c=d$, $c+d=a$ ，那麼 $a+b+c+d$ 的最大值是()。

- A. -5 B. -1 C. 0 D. 1

二、填充題 (每小題 5 分，共 40 分)

9. In the given figure at the right, there are two straight line segments AB, CD intersect with two line segments $\overline{EF}, \overline{GH}$. How many pairs of interior angles on the same side (同旁內角) of the transversal are therein the figure? _____.



10. 對於有理數 x 、 y 定義一種運算“ \triangle ”： $x\triangle y = ax+by+c$ ，其中 a 、 b 、 c 為常數，等式右邊是通常的加法與乘法運算。已知 $3\triangle 5=15$ ， $4\triangle 7=28$ ，則 $1\triangle 1$ 的值為_____。

11. Let four distinct positive integers m , n , p and q satisfy $(7-m)(7-n)(7-p)(7-q)=4$. Determine the sum of m , n , p and q _____.

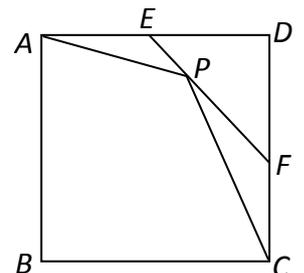
12. 若不等式 $(a+b)x+(2a-3b)<0$ 的解集為 $x>-\frac{1}{3}$ ，則不等式 $(a-3b)x+(b-2a)>0$ 的解集為_____。

13. If 1 angle will separate a plane into 2 parts, then 3 angles will separate a plane at most into how many parts? _____.

14. 已知 $|a|=1$ ， $|b|=2$ ， $|c|=3$ ，且 $a>b>c$ ，那麼 $(a+b-c)^2=_____$ 。

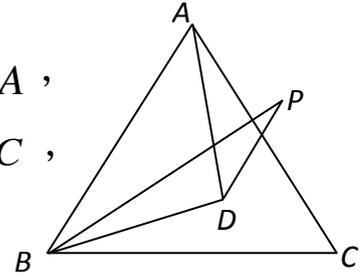
15. 甲、乙二人分別從 A 、 B 兩地同時出發，勻速相向而行。出發後8小時兩人相遇，若兩人每小時都多走2公里，則出發後6小時兩人就相遇在距離中點3公里的地方。已知甲比乙行得快，那麼甲原來每小時行_____公里。

16. 在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 依次為 AD 和 DC 的中點，連接， E 、 F 兩點得到線段 EF ， P 為 EF 上的任意一點。如果正方形 $ABCD$ 的面積為20平方公分，那麼四邊形 $ABCP$ 的面積是_____平方公分。



三、解答題 (每題 10 分，共 20 分)

17. 已知如圖，設 D 為等邊 $\triangle ABC$ 內一點，且 $DB=DA$ ，
 P 點為 $\triangle ABC$ 外一點，且 $BP=BA$ ， $\angle DBP = \angle DBC$ ，
那麼 $\angle BPD$ 是多少度？



18. 設 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$ 為自然數，且 $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_7$ ，又 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_7 = 159$ ，求 $x_1 + x_2 + x_3$ 的最大值。

2013 年第九屆七年級解答

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	C	B	A	D	B	A
題號	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	16	-11	28	$x > -3$	16	0 或 4	6.5	15

17. 連接 DC ，則 $\triangle ADC \cong \triangle BDC \cong \triangle BDP$ ， $\angle P = \angle DCB = 60^\circ \div 2 = 30^\circ$ 。

$$18. \quad 159 = x_1 + x_2 + \cdots + x_7 \geq x_1 + x_2 + x_3 + \frac{(x_1 + 3) + (x_2 + 2) + (x_3 + 1)}{3}$$

$$+ \frac{(x_1 + 4) + (x_2 + 3) + (x_3 + 2)}{3}$$

$$+ \frac{(x_1 + 5) + (x_2 + 4) + (x_3 + 3)}{3} + \frac{(x_1 + 6) + (x_2 + 5) + (x_3 + 4)}{3}$$

解得： $x_1 + x_2 + x_3 \leq 62\frac{1}{7}$ ，

當 $x_1 + x_2 + x_3 = 62$ 時，無法找到滿足條件的數列，

而當 $x_1 = 19$ ， $x_2 = 20$ ， $x_3 = 22$ ， $x_4 = 23$ ， $x_5 = 24$ ， $x_6 = 25$ ， $x_7 = 26$ ，

使得 $x_1 + x_2 + x_3$ 的最大值為 $19 + 20 + 22 = 61$ 。