



Ninth IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2013

2013 年第九屆"IMC 國際數學競賽" (新加坡)

小學六年級決賽試題

一、選擇題 (每小題 5 分，共 40 分)

1. 算式“ $\frac{1001}{1443} \times \frac{10101}{14443}$ ”的計算結果寫成循環小數後，小數點後前 2013 位元數字之和為()。

- A. 9062 B. 9059 C. 9058 D. 9055

2. Determine the sum of all the digits in the final product of

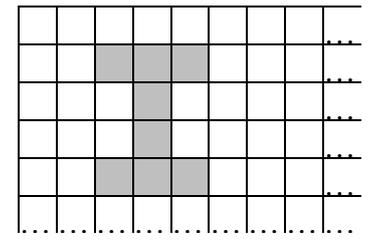
$$9 \times 99 \times 9999 \times \underbrace{99 \dots 9}_{(8)} \times \underbrace{99 \dots 9}_{(16)}.$$

- A. 144 B. 120 C. 96 D. 72

3. 已知七位數 $\overline{ABCDCBA}$ 中相同的字母代表相同的數字，不同的字母代表不同的數字，且這個七位元數滿足第一位能被 2 整除，前 2 位組成的兩位數能被 3 整除，前 3 位組成的三位數能被 4 整除，...，前 7 位組成的七位數能被 8 整除，那麼 $\overline{ABCDCBA}$ 代表的七位數為()。

- A. 2785872 B. 4285824 C. 6925296 D. 8425248

4. 將自然數從 1 開始從左到右寫出，每 m 個一換行，排成一個長方形數表。現在用一個 “I 型框” 圍住 8 個數，當這 8 個數和為 312 時， m 可以是()。



(圖中 I 的位置只是實例，並不固定)

- A. 6 B. 13 C. 20 D. 30

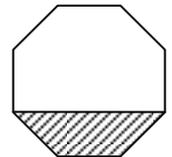
5. 一桶鹽水重 100 公斤，濃度 10%，每次倒出 10 公斤後補入 10 公斤的鹽，那麼當鹽水的濃度第一次大於 50%，是在第()次後。

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

6. 已知正整數 n 在八進制表示下為“12345654321”，那麼 n 除以 7 的餘數為()。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. Select four vertices on a regular octagon(正八邊形) as shown at the right. Connect them to form a trapezoid(梯形)(shaded region). What is the proportion of the shaded region in the regular octagon?



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{8}$

8. 一個直角三角形，一條直角邊長為 1，若以它為軸，將三角形繞一周形成一個圓錐，則圓錐側面積是底面積的 2 倍，若換另一條直角邊為軸，將三角形繞一周形成一個新圓錐，則新圓錐的體積是()。

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 2π D. 3π

二、填空题 (每小題 5 分，共 40 分)

9. 計算： $\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4} - \frac{3 \times 5 \times 7}{4 \times 6} + \frac{5 \times 7 \times 9}{6 \times 8} - \dots + \dots - \frac{15 \times 17 \times 19}{16 \times 18} + \frac{17 \times 19 \times 21}{18 \times 20} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 甲車從 A 地，乙、丙兩車從 B 地同時出發，相向而行。4 小時後甲、乙兩車先相遇，且相遇後甲車又行了 2 小時遇到丙車，之後丙車繼續向前行進，在距 A 地 80 公里處遇到從 A 地返回的乙車；若甲、丙兩車速度相同，那麼 A、B 兩地相距 公里。

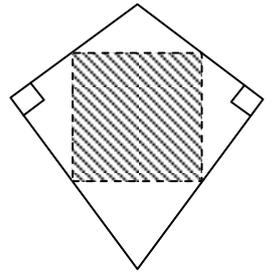
11. Construct two 5-digit numbers from the ten digits 0 to 9 such that each digit will use only once and one 5-digit number is nine times the other 5-digit number. What is the maximum sum of these two 5-digit numbers? .

12. 有兩根蠟燭，長短一樣，粗細不一樣，甲蠟燭 3 小時燃完，乙蠟燭 2 小時燃完，昨晚停電，小明點燃了這兩根蠟燭，後來來電了，所以沒燒完，甲蠟燭剩下的長度是乙蠟燭的 2 倍，今晚又停電了，所以小明繼續點燃它們，來電的時候發現甲蠟燭是乙蠟燭長度的 4 倍，那麼今天停電 小時。

13. 若兩個四位回文數之和為一個五位回文數(例如： $2882+9339=12221$)，把這樣的算式稱為一組“回文算式”，那麼共有 組“回文算式”。

14. 已知三位數 \overline{abc} 與 \overline{def} 滿足“ $\overline{abc} - \overline{def} = a + b + c + d + e + f$ ”，其中相同的字母代表相同的數字，不同的字母代表不同的數字，那麼 \overline{def} 表示的三位數的最小值為 。

15. 如圖所示，一個四邊形，左右對角均為直角，上面兩條邊長度相等，下面兩條邊長度也相等，且兩個長度比為3:4，現在要在其中每條邊上取一點，連成一個正方形(陰影)，如果正方形的邊長和四邊形的邊長都是整數公分，那麼原四邊形周長最小值為_____公分。

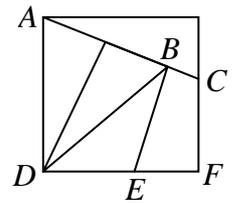


16. 若干 (≥ 2) 個連續正整數之和為2013，那麼這些正整數的乘積從個位起向左數，最多可以數出_____個連續的數字“0”。

三、解答題 (每題 10 分，共 20 分)

17. 如圖，一個正方形被4條線段分成面積相等的5部分，那麼回答下面兩個問題：

(1) $AB : BC = \underline{\quad} : \underline{\quad}$ 。(2) $DE : EF = \underline{\quad} : \underline{\quad}$ 。



18. 將自然數 $1, 2, 3, \dots, 19, 20$ 按順序排成一個數列，將其中相鄰4個數 a, b, c, d 順序變為 d, c, b, a 稱為一次“變換”，那麼：

- (1) 能否經過若干次“變換”，將“20”變到第1項，如果能最少需要幾次，否則說明理由。
- (2) 能否經過若干次“變換”，將“20”變到第1項，同時將“13”變到第2項，如果能最少需要幾次，否則說明理由。

2013 年第九屆六年級解答

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	B	C	C	B	B	B
題號	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	$10\frac{7}{40}$	240	108360	0.3	36	279	686	14

17. 解：

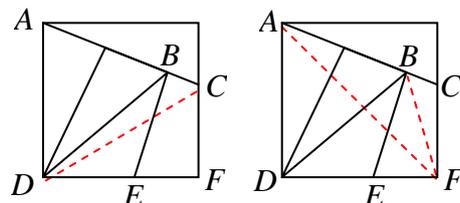
(1) 連接 CD ， $AB : BC = S_{\triangle ABD} : S_{\triangle BCD} = \frac{2}{5} : (\frac{1}{2} - \frac{2}{5}) = 4 : 1$ ；

(2) 連接 FA 、 FB ，

$$S_{\triangle BCF} = S_{\triangle FAB} \div 5 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) \div 5 = \frac{3}{50} ;$$

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{5} - \frac{3}{50} = \frac{7}{50} ;$$

$$DE : EF = S_{\triangle BDE} : S_{\triangle BEF} = \frac{1}{5} : \frac{7}{50} = 10 : 7 .$$



18. 解：

(1) 第 20 位變到第 1 位，要減少 19 位，每次變換最多減少 3 位，故至少 7 次； $20 \Rightarrow 17 \Rightarrow 14 \Rightarrow \dots \Rightarrow 5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ ，7 次

(2) 第 20 位變到第 1 位，要減少 19 位，需要奇數次，第 13 位變到第 2 位，要減少 11 位，需要奇數次，每次變換最多把兩個數減少 $3+1=4$ 位，至少 9 次。

先用 2 次把 20 變到第 14 位，接下來透過 1 次變換調換 13 與 20 的位置；再來，透過 6 次變換把 20、13 變到第 1、2 位，所以最少需要 9 次。