



Ninth IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2013
2013 年第九屆"IMC 國際數學競賽" (新加坡)
小學五年級決賽試題

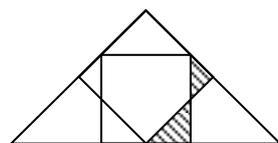
一、選擇題 (每題 5 分，共 40 分)

1. 計算： $9 \times 99 \times 9999 = (\quad)$ 。
A. 9090909 B. 8989899 C. 8909109 D. 9999999
2. 現有 n 枚棋子排成空心方陣，如果既能排成 2 層空心方陣，又能排成 3 層空心方陣，那麼 n 可以是下面的哪個數()。
A. 24 B. 36 C. 48 D. 60
3. What is the 2013th digit after the decimal point when $\frac{10101}{14443}$ is expressed a repeating decimal number (循環小數)?
A. 9 B. 6 C. 3 D. 0
4. 將字母 A~Z 順時針排成一圈，並順時針開始如下操作：從 A 開始，隔過 A 劃去後 2 個字母，再隔過下一個字母劃去後 2 個字母，重複這樣的操作，直至全部劃完，那麼最後劃去的字母是()。
A. I B. M C. C D. V
5. 現有 4 個算式“ $\square + \square = \square$ ， $\square - \square = \square$ ， $\square \times \square = \square \square$ ， $\square \square \square \div \square = \square \square$ ”，如果只允許使用三個不同的數字填入其中，使得等式全部成立，那麼其中出現最多的數字最少出現()次。(不允許出現 0 作首位)
A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

6. 一個自然數乘以 2 除以 3 餘 1，所得商乘以 2 除以 3 也餘 1，再得到的商還是這樣，那麼原來的數最小是()。

- A. 80 B. 62 C. 44 D. 26

7. Two squares are inscribed in an isosceles right-angled triangle (等腰直角三角形) as shown in the figure at the right, such that each vertex lies on the side of the triangle. The area of these isosceles right-angled triangles is 90 square units. What is the difference of the two shaded portion?



- A. 2.5 B. 2 C. 1.5 D. 3

8. 有兩根蠟燭，長短一樣，粗細不一樣，甲蠟燭 3 小時燃燒完，乙蠟燭 2 小時燃燒完，一次停電，小明同時點燃了這兩根蠟燭，後來來電了，所以沒燒完，發現甲蠟燭剩下的長度是乙蠟燭的 2 倍，這次停電了()小時。

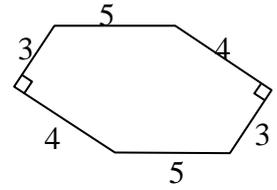
- A. 1 B. 1.2 C. 1.5 D. 1.8

二、填空題 (每題 5 分，共 40 分)

9. 計算： $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400} + \frac{11}{900} =$ _____。

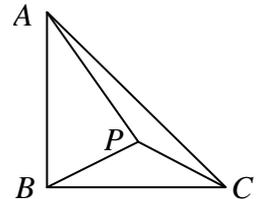
10. 老師準備了一些筆和練習本要發給班上的學生，原計劃每人發 5 支筆與 3 本練習本，則最後餘下 16 本練習本；實際上先按每人發 6 支筆與 4 本練習本發給了全部的女生後，發現男生只能每人發 3 支筆與 2 本練習本，才能恰好全部發完；那麼這個班共有_____名男生。

11. Using 2 pieces of wire with the length of 3 dm, 4 dm and 5 dm each to enclose a hexagon shape (六邊形) as shown in the diagram at the right such that the parallel sides are of the same lengths, the angle of those two wires with lengths of 3 dm and 4 dm will form a right angle. What is the greatest possible area of this hexagon? _____.



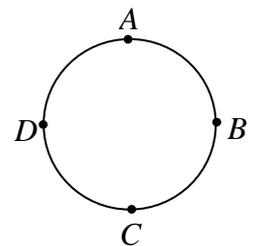
12. 已知三位數 \overline{abc} 與 \overline{def} 滿足“ $\overline{abc} - \overline{def} = a + b + c + d + e + f$ ”，其中相同的字母代表相同的數字，不同的字母代表不同的數字，那麼 \overline{def} 表示的三位數的最大值為_____。

13. 如圖，在等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $PB=5$ ，若 $\triangle APB$ 、 $\triangle BPC$ 的面積分別為 16、12，那麼 $\triangle APC$ 的面積為_____。



14. 若兩個三位回文數之和為一個四位回文數(例如： $282+939=1221$)，把這樣的算式稱為一組“回文算式”，那麼共有_____組“回文算式”。

15. A 、 B 、 C 、 D 是一條400公尺環形跑道的4等分點，現在甲逆時針、乙順時針同時從 A 點出發跑步背向，當甲看到乙已經到達 C 點時，馬上返身往回跑，但是速度下降了 $\frac{1}{4}$ ，結果很快被乙在 D 點追上，如果乙此時返身，甲乙二人下一次相遇點距 B 點_____公尺。



16. 將數字1~7圍成一圈，統計相鄰兩個數之差(大減小)，發現7個差之和最大為24，那麼這時的填法共有_____種。(旋轉相同或對稱相同的排法算同一種)

三、解答題 (每題 10 分，共 20 分)

17. 已知七位數 $\overline{ABCDCBA}$ 中相同的字母代表相同的數字，不同的字母代表不同的數字，且這個七位元數滿足第1位能被2整除，前2位組成的二位數能被3整除，前3位組成的三位數能被4整除， \dots ，前7位組成的七位數能被8整除，那麼 $\overline{ABCDCBA}$ 代表的七位數是什麼？

18. 對按順序排列的數，定義操作規則：相鄰4個數 a 、 b 、 c 、 d ，順序變為 d 、 c 、 b 、 a ，稱為一次“變換”；對於按順序排列的 1 、 2 、 3 、 \dots 、 19 、 20 ，那麼：

(1) 至少經過幾次可以將 20 變到第1項，寫出操作過程。

(2) 能否經過若干次“變換”，變為 20 、 13 、 1 、 2 、 3 、 \dots 、 12 、 14 、 15 、 \dots 、 19 ；能則寫出操作過程，否則說明理由。

2 0 1 3 年 第 九 屆 五 年 級 解 答

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	B	B	C	D	A	C
題號	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	$\frac{35}{36}$	16	37	873	4	36	50	36

17. 解：

- (1) 第 4 位數字 $D=5$ 或 0 ；
- (2) $8|\overline{CBA} \Rightarrow 8|\overline{BA}$ ，又 $3|\overline{AB}$ ，所以 $3|\overline{BA}$ ，即 $24|\overline{BA}$ ； $\overline{BA}=24、48、72、96$ ；
- (3) $3|\overline{CDC}$ ，且 C 為偶數， $C=2$ 或 8 ；
- (4) $C=2$ ， 8425248 (前 3 位非 4 倍) 或 6925296 (前 6 位非 7 倍)
 $C=8$ ， 4285824 或 2785872 (前 3 位非 4 倍) 或 6985896 (前 3 位非 4 倍)
 同理 $D=0$ 時，經驗證均不滿足條件。
 因此，答案為 4285824 。

18. 解：

- (1) 每次變換會將一個數的位置 ± 3 或 ± 1 ， 20 從第 20 位變到第 1 位，要減少 19 位，每次變換最多減少 3 位，故至少 7 次；
 具體操作： $20 \Rightarrow 17 \Rightarrow 14 \Rightarrow 11 \Rightarrow 8 \Rightarrow 5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ ，7 次
- (2) 第 20 位變到第 1 位，要減少 19 位，需要奇數次，
 第 13 位變到第 2 位，要減少 11 位，需要奇數次，
 第 1 位變到第 3 位，需要增加 2 位，需要偶數次，矛盾；所以不能。