Eighth IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2012

2012年第八屆"IMC 國際數學競賽"（新加坡）
國中三年級決賽試題

一、選擇題 (每題 5 分，共 40 分)

1. 已知$\triangle ABC$的三邊長為 8、12、18，又知$\triangle A_1B_1C_1$有一邊長為 12，且與$\triangle ABC$相似而不全等，則這樣的$\triangle A_1B_1C_1$個數為(　　)。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 在凸四邊形 $ABCD$ 中，若 AB 大於其餘三邊，BC 小於其餘三邊，則$\angle BAD$、$\angle BCD$的關係為(　　)。

A. $\angle BAD < \angle BCD$　　B. $\angle BAD = \angle BCD$

C. $\angle BAD > \angle BCD$　　D. 不能確定

3. If $-1 \le a \le 1$ satisfies the inequality $ax^2 + 7x - 1 > 2x + 5$, then how many the possible solution of x will there be?

A. $2 \le x \le 3$　　B. $2 < x < 3$　　C. $-1 \le x \le 1$　　D. $-1 < x < 1$

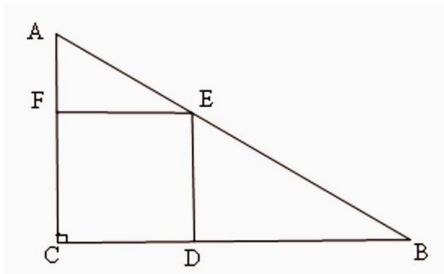
4. 若正整數a, b, c, x, y, z滿足$ax = b + c, by = a + c, cz = a + b$，則乘積 xyz 可能的取值個數為(　　)。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 無數多

5. 已知 $f(x)=x^2+6ax-a, y=f(x)$ 的圖像與 x 軸有兩個不同的交點 $(x_1,0),(x_2,0)$，且 $\dfrac{a}{(1+x_1)(1+x_2)}-\dfrac{3}{(1-6a-x_1)(1-6a-x_2)}=8a-3$，則 a 的值是(　　)。

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 0 或 $\frac{1}{2}$　　D. 2

6. Refer the diagram at the right，in $Rt\triangle ABC$ with side AB = 35，a square $CDEF$ with side 12 is inscribed in $\triangle ABC$，then the perimeter of $\triangle ABC$.



A. 84　　B. 81　　C. 40　　D. 35

7. 如圖 2，在單位正方形 ABCD 中，以邊 AB 為直徑向形內作半圓，自點 C、D 分別作半圓的切線 CE、DF(E、F 為切點)，則線段 EF 的長為(　　)。

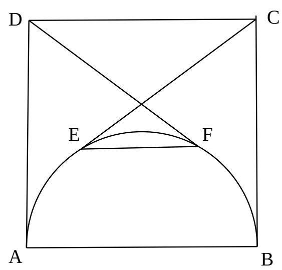


圖 2

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

8. 先後 2 次拋擲一枚骰子，將得到的點數分別記為 a、b，將 a、b、5 的值分別作為三條線段的長，則這三條線段能圍成等腰三角形的概率為(　　)。

A. $\frac{11}{36}$　　B. $\frac{13}{36}$　　C. $\frac{5}{18}$　　D. $\frac{7}{18}$

二、填空題 (每小題 5 分，共 40 分)

9. 當 a 分別取–2、–1、0、1、2、3、…、97 這 100 個數時，關於 x 的分式方程 $\frac{1}{x-1}-\frac{a}{2-x}=\frac{2(a+1)}{x^2-3x+2}$ 有解的概率是_______。

10. Let $|a|>1$，what is the simplified value of $\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^4+2\left(1-2a^2\right)\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^2+3$? _______.

11. 如圖 3，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$BC=3, AC=4, AB=5$ 其內切圓為 O，過 OA、OB、OC 與的 O 交點 M、N、K 分別作 O 的切線，與 $\triangle ABC$ 的三邊分別交於 A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2，則六邊形 $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ 的面積是_______。

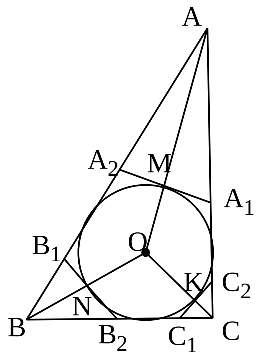


圖 3

12. The real numbers x，y，z，w satisfies $x\ge y\ge z\ge w\ge 0$ and $5x+4y+3z+6w=100.$ Determine the maximum value of $x+y+z+w.$ _______.

13. 設 k 為常數，關於 x 的方程 $x^2-2x+\frac{3k^2-9k}{x^2-2x-2k}=3-2k$，有四個不同的實數根，則 k 的取值範圍是____________。

14. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，$\angle BAC=45^0$，延長 BC 至 D，使 $CD=\frac{1}{2}BC$，AD//OC，則 $\angle ABC=$_______。

15. 圖 4 是一個掛在牆壁上時鐘的示意圖，O 是其秒針的轉動中心，M 是秒針的另一端，$OM=10cm$，l 是過點 O 的鉛直直線。現有一隻螞蟻 P 在秒針 OM 上爬行，螞蟻 P 到點 O 的距離與 M 到 l 的距離始終相等。1 分鐘的時間內，螞蟻 P 被秒針 OM 攜帶的過程中移動的路程(非螞蟻在秒針上爬行的路程)是________cm。

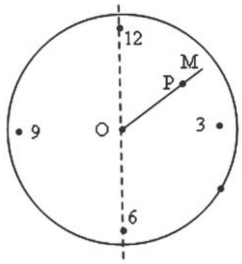


圖 4

16. 某校初三年級有四個班，初三數學某次測試後，隨機地在各班抽取部分學生進行測試成績統計，各班被抽取的學生人數恰好成等差數列，人數最少的班被抽取了 22 人，抽取出來的所有學生的測試成績統計結果的頻率分佈條形圖如圖 6 所示，其中 120～130(包括 120 分但不包括 130 分)的頻率為 0.05，此分數段的人數為 5 人，則本次測試的年級平均成績為__________。

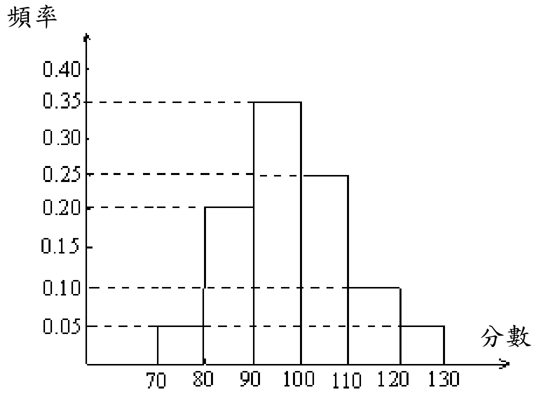


圖 6

三、解答題 (每題 10 分，共 20 分)

17. 已知拋物線 $y=x^2$ 與動直線 $y=(2t-1)x-c$ 有公共點 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，且 $x_1{}^2+x_2{}^2=t^2+2t-3$

(1)求 t 的取值範圍；(2)求 c 的最小值，並求出 c 取最小值時 t 的取值。

18.對於每項均是正整數的數列 A：a_1、a_2、…、a_n，定義變換 T_1，T_1 將數列 A 變換成數列 $T_1(A)$：n、a_1-1、a_2-1、…、a_n-1，對於每項均是非負整數的數列 B：b_1、b_2、…、b_m，定義變換 T_2，T_2 將數列 B 各項從大到小排列，然後去掉所有為零的項，得到數列 $T_1(B)$；又定 $S(B)=2(b_1+2b_2+\cdots+mb_m)+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2$，設 A_0 是每項均為正整數的有窮數列，令 $A_{k+1}=T_2(T_1(A_k))(k=0、1、2、\cdots)$，

(Ⅰ)如果數列 A_0 為 5，3，2，寫出數列 A_1、A_2；

(Ⅱ)對於每項均是正整數的有窮數列 A，證明 $S(T_1(A))=S(A)$。

2012 年第八屆九年級解答

題號	1	2	3	4	5	6
答案	C	D	B	B	A	A
題號	7	8	9	10	11	
答案	B	D	$\frac{49}{50}$	2	$2\sqrt{2}+\sqrt{5}+\frac{2\sqrt{10}}{3}-\frac{11}{3}$	
題號	12	13		14	15	16
答案	25	$-4<k<1$，且$k\neq 0$，且$k\neq -\frac{3}{2}$		75^0 或 15^0	20π	98

17.（1）$2-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq t\leq 2+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（2）當 $t=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 時，$c_{\min}=\frac{11-6\sqrt{2}}{4}$

18.（Ⅰ)解：

A_0：5，3，2

$T_1(A_0)$：3，4，2，1

$A_1=T_2(T_1(A_0))$：4，3，2，1

$T_1(A_1)$：4，3，2，1，0

$A_2=T_2(T_1(A_1))$：4，3，2，1

(Ⅱ)證明：

設每項均是正整數的有窮數列A為$a_1, a_2, \cdots, a_n$，

則$T_1(A)$為n，a_1-1，a_2-1，…，a_n-1，從而

$$S(T_1(A))=2[n+2(a_1-1)+3(a_2-1)+\cdots+(n+1)(a_n-1)]$$

$$+n^2+(a_1-1)^2+(a_2-1)^2+\cdots+(a_n-1)^2$$

又$S(A)=2(a_1+2a_2+\cdots+na_n)+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，所以$S(T_1(A))-S(A)$

$$=2[n-2-3-\cdots-(n+1)]+2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+n^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+n$$

$=-n(n+1)+n^2+n=0$，故$S(T_1(A))=S(A)$