1Eighth IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2012

2012 年第八屆"IMC 國際數學競賽"（新加坡）

國中二年級決賽試題

一、選擇題 (每題 5 分，共 40 分)

1. 把 26 個英文字母規律分成 5 組(如下)，現在還有 5 個字母 D、M、Q、X、Z，請你按原規律補上，其順序依次為________。

   (1) F R P J L G _____

   (2) H I O _____

   (3) N S ____

   (4) B C K E ____

   (5) V A Y W U ____

   A. QXZMD　　B. DMQZX　　C. ZXMDQ　　D. QXZDM

2. 用 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，如 $[3]=3$，$[3.1]=3$，設

$$S=\frac{1}{\left[\frac{(10\times11-1)^2}{10\times11}\right]}+\frac{1}{\left[\frac{(11\times12-1)^2}{11\times12}\right]}+\cdots\cdots+\frac{1}{\left[\frac{(49\times50-1)^2}{49\times50}\right]}$$

，則 $[20S]=$_______。

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle B=60^0,\angle C=90^0,AB=1$，分別以 AB、BC、CA 為邊長向 ΔABC 外作等邊 ΔABR、等邊 ΔBCP、等邊 ΔCAQ、連結 QR 交 AB 與點 T，則 ΔPRT 的面積等於_______。

   A. $\frac{9\sqrt{3}}{32}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 有 5 個木箱，編號為 1、2、3、4、5，每個箱子有一把鑰匙，5 把鑰匙各不相同，每個箱子放進一把鑰匙鎖好：先挖開 1、2 號箱子，可以取出鑰匙去開箱子上的鎖，如果最終能把 5 把鎖都打開，則說這是一種放鑰匙的"好"的方法，那麼"好"的方法共______種。

A. 9　　B. 48　　C. 96　　D. 240

5. How many natural number solutions are there in the indeterminate equation $x^2y^2 - x^3 + y^3 - xy = 49$?

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

6. 學生甲與學生乙玩一種轉盤遊戲，如圖 1 是兩個完全相同的轉盤，每個轉盤被分成面積相等的四個區域，分別用數位"1"、"2"、"3"、"4"表示，固定指針，同時轉動兩個轉盤，任其自由停止，若兩指針所指數字的積為偶數，則甲獲勝；若兩指針所指數字的積為奇數，則乙獲勝；若指標指向扇形的分界線，則都重轉一次，在該遊戲中乙獲勝的概率是_________。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{5}{6}$

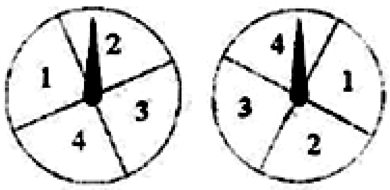

圖 1

7. 在 3×5 的棋盤上，一枚棋子每次可以沿水平或者垂直方向移動一小格，但不可以沿任何斜對角線移動。從某些特定的格子開始，要求棋子經過全部的小方格恰好一次，但不必回到原來出發的小方格上。在這 15 個小方格中，有____個可以是這枚棋子出發的小方格。

A. 6　　B. 8　　C. 9　　D. 10

8. As shown in figure, in the isosceles trapezoid *ABCD*, $AB \parallel CD$, $DC = 5$cm, $AB = 2DC$ and $\angle A = 60°$. If E is a point on AB such that $EF = FB = AC$ and $FA = AB$. What is the length of EB in cm?

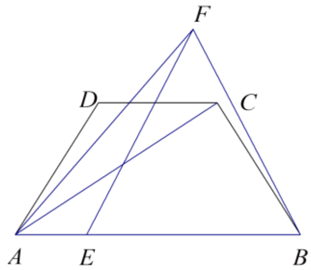

圖 2

A. 5　　B. $\frac{10}{3}$　　C. 7.5　　D. 8

二、填空題 (每題 5 分，共 40 分)

9. Given that that $x^2+2y^2=3xy$. What is the numerical value of $\dfrac{x^2+y^2}{xy+2y^2}$?

________.

10. AD、BE、CF 為 ΔABC 的內角平分線，若 $BD+BF=CD+CE=AE+AF$，則 $\angle BAC$ 的度數為____________。

11. In Fig. 3, *ABCD* is a rectangle. *AB*=2*cm*，*BC*=4*cm* and *M* is the mid point of *BC*. *G* is the point of intersection of *AM* and *BD*. Determine the area of the shaded portion. ________.

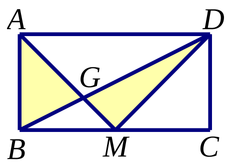

Fig.3

12. 將 2012 個放有小球的盒子自左向右排成一排，某人打開從左數的第四個盒子，發現盒裡有 8 個小球，且還知道每相鄰的四個盒子裡的小球數共有 35 個，那麼最右邊的盒子裡有__________個小球。

13. (如圖 4) 把邊長為 1 的正方形紙片 $OABC$ 放在直線上，OA 邊與直線重合，然後將正方形紙片繞著頂點 A 按順時針方向旋轉 90°，

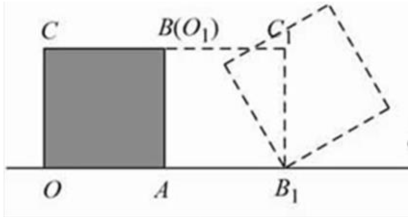

圖 4

此時點 O 運動到了O_1點處(即點 B 處)，點 C 運動到了點C_1處，點 B 運動到了點B_1處；又將正方形紙片$AO_1C_1B_1$繞B_1點按順時針方向旋轉 90°，……，按上述方法經過 5 次旋轉後，則頂點 O 在此運動過程中所形成的圖形與直線圍成圖形的面積為__________。

14. 在一個圓形時鐘的表面，OA 表示秒針，OB 表示分針(O 為兩針的旋轉中心)。若現在時間恰好是 12 點整，則經過_________ 秒後，△OAB 的面積第一次達到最大。

15. 若關於x的方程$\dfrac{2k}{x+2}-\dfrac{x-1}{x^2+2x}=\dfrac{kx+1}{x}$只有一個解(相等的解也算作一個)，則$k$的值為______。

16. 設有 A、B 兩個容器，A 中盛有 10%的食鹽水 100 克，B 中盛有 5%的食鹽水 100 克。今從 A、B 中取出盛有 a 克的食鹽水倒入對方中，攪勻後，再從 A、B 中取出 a 克的溶液倒入對方中。這時 A 中的溶液濃度為 8.4%。而 B 中溶液濃度為________。(a<50 克)

三、解答題（每題 10 分，共 20 分）

17. 求和 $S=\frac{1-1}{2}+\frac{2-1}{2^2}+\frac{3-1}{2^3}+\cdots+\frac{2012-1}{2^{2012}}$ 。

18. 一隻青蛙在平面直角坐標系上從點(1，1)開始，可以按照如下兩種方式跳躍：①能從任意一點(a，b)，跳到點($2a$，b)或(a，$2b$)；②對於點(a，b)，如果 $a>b$，則能從(a，b)跳到($a-b$，b)；如果 $a<b$，則能從(a，b)跳到(a，$b-a$)。例如，按照上述跳躍方式，這只青蛙能夠到達點(3，1)，跳躍的一種路徑為：(1，1)→(2，1)→(4，1)→(3，1)。

請你思考：這只青蛙按照規定的兩種方式跳躍，能到達下列各點嗎？如果能，請分別給出從點(1，1)出發到指定點的路徑；如果不能，請說明理由。

(1) (3，5)；　(2) (12，60)；　(3) (200，5)；　(4) (200，6)。

2012 年第八屆八年級解答

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	A	B	B	A	B	C
題號	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	$\frac{2}{3} or \frac{5}{4}$	60^0	$\frac{8}{3}$	8	$1+\frac{5}{4}\pi$	$15\frac{15}{59}$	0 或 1	6.6%

17. 解：

設 A= $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\text{---}+\frac{2012}{2^{2012}}$ ，B= $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\text{---}+\frac{1}{2^{2012}}$ ，

2A= $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\text{---}+\frac{2012}{2^{2011}}$ ，

則 2A-B= $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\text{---}+\frac{2011}{2^{2011}}-\frac{1}{2^{2012}}=1+A-\frac{2013}{2^{2012}}$ ，

所以 $S=1-\frac{2013}{2^{2012}}$ 。

18. 解：

(1)能到達點(3，5)和點(200，6)

從(1，1）出發到(3，5)的路徑為：(1，1)→(2，1)→(4，1)→(3，1)→(3，2)→(3，4)→(3，8)→(3，5)

從(1，1)出發到(200，6)的路徑為：(1，1)→(1，2)→(1，4)→(1，3)→(1，6)→(2，6)→(4，6)→(8，6)→(16，6)→(10，6)→(20，6)→(40，6)→(80，6)→(160，6)→(320，6)→(前面的數反覆減 20 次 6)→(200，6)。

(2)不能到達點(12，60)和(200，5)，理由如下：

∵ a 和 b 的公共奇約數=a 和 $2b$ 的公共奇約數=$2a$ 和 b 的公共奇約數，∴ 由規則①知，跳躍不改變前後兩數的公共奇約數。

∵ 如果 $a>b$，a 和 b 的最大公約數=$(a-b)$和 b 的最大公約數，如果 $a<b$，a 和 b 的最大公約數=$(b-a)$和 b 的最大公約數，∴ 由規則②知，跳躍不改變前後兩數的最大公約數從而按規則①和規則②跳躍，均不改變座標前後兩數的公共奇約數。

∵ 1 和 1 的公共奇約數為 1，12 和 60 的公共奇約數為 3，200 和 5 的公共奇約數為 5，∴ 從(1，1)出發不可能到達給定點(12，60)和(200，5)。