Eighth IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2012

2012年第八屆"IMC國際數學競賽"（新加坡）
國中一年級決賽試題

一、選擇題 (每題5分，共40分)

1. a 是最大的負整數，b 是絕對值最小的有理數，則 $a^{2012}+\dfrac{b^{2010}}{2011}=$ ______。

A. 1　　B. 0　　C. $\dfrac{1}{2011}$　　D. 2010

2. Given: a and b are constants, the solution set of the inequalities $\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{b}>0$ is $x<\dfrac{1}{5}$. Determine the solution set of the inequalities $bx-a>0$ with respect to x.

A. $x>\dfrac{1}{5}$　　B. $x<-\dfrac{1}{5}$　　C. $x>-\dfrac{1}{5}$　　D. $x<\dfrac{1}{5}$

3. 把1746的各位數字倒過來寫得到6471，新數比原來大4725，那麼在所有的四位數中，滿足新數比原數大4725的數共有______個。

A. 28　　B. 24　　C. 20　　D. 16

4. 多項式$x^{12}-x^{6}+1$除以$x^{2}-1$的餘式是________。

A. 1　　B. -1　　C. $x-1$　　D. $x+1$

5. Given that $\angle AOB=70°,\ \angle BOD=3\angle BOC,\ \angle BOC<45°$ and $\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOC$.

Which of the following is impossible to be the degree of $\angle BOC$?

A. $10°$　　B. $14°$　　C. $30°$　　D. $40°$

6. 二行三列的方格棋盤上沿骰子的某條邊翻動骰子(相對面上分別標有 1 點和 6 點，2 點和 5 點，3 點和 4 點)，在每一種翻動方式中，骰子不能後退，開始時骰子如圖 1 那樣擺放，朝上的點數是 2；最後翻動到如圖 2 所示的位置，此時骰子朝上的點數不可能是下列數中的______。

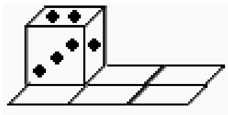
圖 1

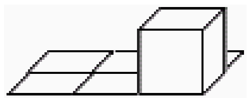
圖 2

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 1

7. 如圖 3，已知△ABC 的面積為 42，且 D、E 是 AB 的三等分點，F、G 是 AC 的三等分點，CD 分別交 BF、BG 於 M、N，CE 分別交 BF、BG 於 P、Q，則四邊形 EPMD 的面積為______。

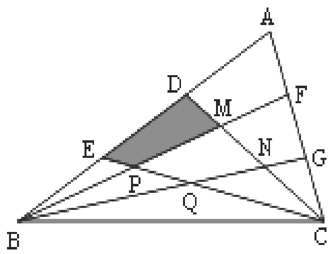

圖 3

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

8. 有一堆黑、白圍棋子，黑子的個數是白子的 3 倍多 5 個，每次從堆中取出 7 個白子和 15 個黑子，經過若干次後，還剩下 3 個白子和 56 個黑子，那麼這堆棋子有______個。

A. 52　　B. 158　　C. 210　　D. 213

二、填空題 (每題 5 分，共 40 分)

9. 觀察圖 4，它們是按一定規律排列的，依照此規律，第______個圖形共有 105 個★。

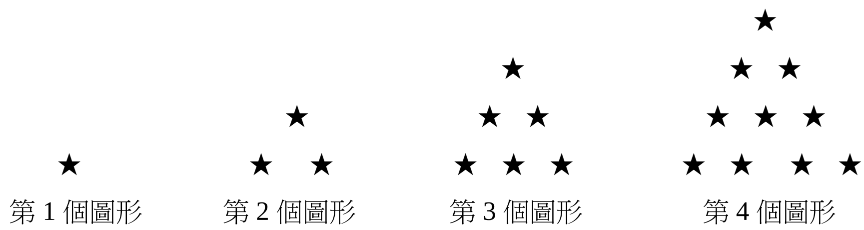

圖 4

10. a、b 是兩個正整數，它們的最小公倍數是 $2^5 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$，那麼這樣的有序數組 (a,b) 有_______個。

11. 如圖 5，要使輸出值 y 大於 100，則輸入的最小正整數 x 是______。

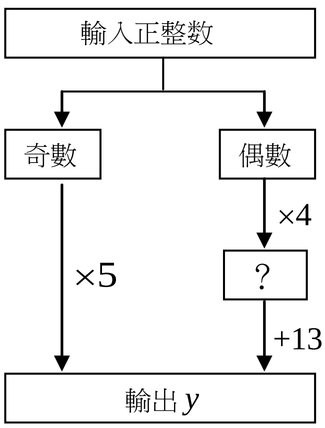

圖 5

12. Search the pattern in Table 1. Tables 2 and 3 are cut out portion from Table 1. Find the value of $\frac{a+b}{2}$?

0	1	2	3	…
1	3	5	7	…
2	5	8	11	…
3	7	11	15	…
…	…	…	…	…

Table 1

11
14
a

Table 2

11	13
17	b

Table 3

13. 同一條直線上有 A、B、C、D 四點，已知：$AD=\frac{5}{9}DB, AC=\frac{9}{5}CB,$ 且 $CD=4cm$，則 AB 的長為________。

14. 用符號 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 中每一個表示 1、2、3、4、5、6、7、8、9、0 這十個數碼中的一個，由此做成兩個五位數 $m=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$，$n=\overline{a_6a_7a_8a_9a_{10}}\,(m>n)$，則 $m-n$ 的最小值是________。

15. If $a<0$ and $|a|x\le a,$ then what is the smallest value of $|2x-6|-|x-2|$? ________.

16. 甲、乙兩人共同清理 400 公尺的環形跑道上的積雪，兩人同時從同一地點背向而行各自進行清理，最初甲清理的速度比乙快 $\frac{1}{3}$，後來乙用 10 分鐘的時間去調換工具，回來繼續清理，但工作效率比原來提高了一倍，結果從甲、乙開始清理算起，經過 1 小時就完成了清理積雪的工作，並且兩人清理的跑道一樣長，則乙換了工具後又工作了________分鐘。

三、解答題 (每小題 10 分，共 20 分)

17. 由常識知道人的血液分為 A 型、B 型、AB 型、O 型四種類型。輸血時，應以輸入同型血為原則，也就是每種血型的人可以給自己同血型的人輸血，但在沒有同型血而又情況緊急時，A 型和 B 型的人可以給 AB 型的人輸血，O 型的人可以給各種血型的人輸血(說明：這時捐血者與受血者無凝集反應可以輸血，否則不可以輸血)。現有一個 O 型血的人急需輸血，現有 18 人準備義務捐血，經檢測與 A 型血發生凝集者為 9 人，與 B 型血發生凝集者為 7 人，與 A、B 型血都發生凝集者和都不發生凝集者共有 8 人，求捐血者中血型符合要求的有幾人。

18. 一個三位元數 A，用 A 的各個數字全排列得到的一切數的算術平均值仍是 A，滿足條件的數有多少個？

2012 年第八屆七年級解答

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	A	A	D	D	C	D
題號	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	14	1155	21	$\frac{37}{2}$	14 或 $\frac{112}{53}$ 或 $\frac{8}{7}$	247	-1	30

17.設 18 名捐血者中 AB 型者 x 人，則 B 型血者為 $(9-x)$ 人，A 型血者為 $(7-x)$ 人，O 型血者為 $(8-x)$ 人，根據題意，得

$(7-x)+(9-x)+x+(8-x)=18$，解這個方程，

得 $x=3$，故 $8-x=5$ 人

答：捐血中血型符合要求的有 5 人

18.設 $\overline{abc}$ 為所求之數，由題意得

$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=6\overline{abc}$

即 $222(a+b+c)=6(100a+10b+c)$，

化簡得 $7a=3b+4c$， $7(a-b)=4(c-b)$

$a=b=c$ 或者 $a-b=4$ $\quad c-b=7$ $\quad$ ($0\le b\le 2$)

或者 $b-a=4$ $\quad b-c=7$ $\quad$ ($7\le b\le 9$)

滿足條件的有 15 個 112、222、…、999、407、518、629、370、481、592