Seventh IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2011

2011 年第七屆"IMC 國際數學競賽"（新加坡）

國中三年級決賽試題

一、選擇題 (每題 5 分，共 40 分)

1. 使等式 $\sqrt{\dfrac{ac^4}{b^6}}=-\dfrac{c^2\sqrt{a}}{b^2}$ 成立的條件是(　　)。

A. $a\geq 0$，$b\neq 0$，$c\geq 0$　　B. $a\geq 0$，$b\neq 0$，c 為任意實數

C. $a\leq 0$，$b\neq 0$，$c\leq 0$　　D. $a\geq 0$，$b<0$，c 為任意實數

2. 在銳角△ABC 中，AD 最高，BE 是中線，若∠EBC=30°，則 AD 與 BE 的大小關係是(　　)。

A. $AD>BE$　B. $AD=BE$　C. $AD<BE$　D. 無法判斷

3. 已知周長相同的正方形，正六邊形、圓形的面積分別為S_1，S_2，S_3，則S_1，S_2，S_3的關係是(　　)。

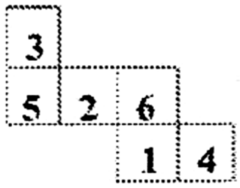
A. $S_3<S_2<S_1$　　B. $S_1<S_2<S_3$

C. $S_2<S_1<S_3$　　D. $S_1<S_3<S_2$

4. 已知等腰三角形一腰上的高與這腰的比為 5：13，則這三角形底角的正弦是(　　)。

A. $\dfrac{\sqrt{26}}{26}$　B. $\dfrac{\sqrt{26}}{26}$ 或 $\dfrac{5\sqrt{26}}{26}$　C. $\dfrac{5\sqrt{26}}{26}$　D. $\dfrac{5}{13}$

5. 一個均勻的立方體，六個面上分別標有數字 1、2、3、4、5、6，右圖是該立方體表面的展開面，拋擲這個立方體，則朝上一面的數恰好等於朝下一面的數的 $\frac{1}{2}$ 的機率是(　　)。

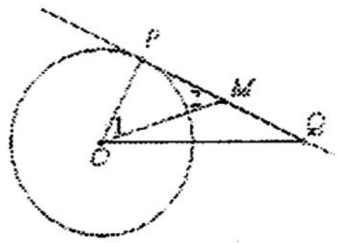


A. $\frac{1}{36}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

6. 某次口試知識競賽中共有 10 到選擇題，有若干人參加，每人都設有 10 分的基礎分，在此基礎上，每答對一題給 4 分，答錯一題不給分且倒扣一分，不答不給分。則此次測驗最多有(　　)種可能的成績。

A. 42　　B. 45　　C. 55　　D. 66

7. In the figure，*PQ* is <u>tangent</u> (切線) to circle *O* at point *P*. Line segment *OM* <u>bisects</u> (平分) *PQ*，and the measure of angle 1 is equal to the measure of angle 2. If the <u>radius</u> (半徑) length of the circle is 10 <u>centimeters</u> (公分). What is the length of *OQ*?



A. $10\sqrt{2}$ cm　　B. $10\sqrt{3}$ cm　　C. 20cm　　D. $10\sqrt{5}$ cm

8. 設 a 為實數，方程 $\left|x^2-1\right|-x-a=0$ 恰好有 3 個實根，則 a 的取值為(　　)。

A. $a=-1$　　B. $-1<a<1$ 或 $a>\frac{5}{4}$　　C. $a=1$ 或 $a=\frac{5}{4}$　　D. $1<a<\frac{5}{4}$

二、填空題 (每題 5 分，共 40 分)

9. $\frac{2011^3-2\times2011^2-2009}{2011^3+2011^2-2012}=$________。

10.若 $f(x)$ 為一次函數，且 $\underbrace{f(f(f(\cdots(f(x))\cdots)))}_{2011}=x+2011$，則函數 $f(x)$ 的解析式為________。

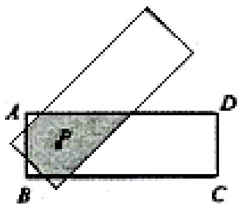
11.今年 2011 年劉洋的年齡剛好等於他出生年份是數字之和，則他今年的年齡是______歲。

12.用記號 $Max(a,b)$ 表示兩個實數 a、b 中較大的一個(若 $a=b$，則表示其中任意一個)，設在 $f(x)=Max(|x-3|, -x^2+8x-11)$，$3\le x\le 6$ 中，使 $f(x)$ 取最小值的 x 值最接近的整數是______。

13.半徑為 20.11 公分的圓內有 n 個點，且這 n 個點兩兩之間的距離都大於 20.11 公分，則 n 的最大值是_______。

14.若一個比 6 大的整數 n 是方程 $x^2-px+q=0$ 的一個解且在 n 進位制中 p 的表示是 15，則 q 的 n 進位制中表示是______。(注：10 在 n 進位制中表示為$(10)_n$)

15.矩形 $ABCD$ 中(如右圖)，$AB=CD=2$，$BC=AD=6$，矩形內部有一點 P，它到 AB、BC、AD 的距離都是 1，把矩形 $ABCD$ 繞 P 旋轉 45°，則旋轉後的公共部分的面積是________。



16.二次函數 $y=ax^2$ 與直線 $x=1$，$x=3$，$y=1$，$y=2$ 圍成的矩形有公共點，則 a 的取值範圍是________。

三、解答題 (每題 10 分，共 20 分)

17.今有 36 張卡片，在每張卡片上用紅、黑色筆各寫上一個不超過 6 的正整數。但要使黑字相同的任意兩張上所寫的紅色數字都不相同。現在把每張上的兩個數相乘，得到 36 個積，求出這 36 個積之和。

18.甲、乙兩個鐘都不準。某天中午 12 點鐘，兩個鐘都對準了時間，第二天中午甲鐘 12 點時，乙鐘是 11 點 48 分，之後不久，乙鐘對準了正午 12 點，甲鐘還照原樣走，第三天白天乙鐘 12 點時，甲鐘是 12 點 18 分。那麼第四天白天甲鐘 12 點時，乙鐘顯示的時間是幾點？

2 0 1 1 年第七屆九年級解答

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9
答案	D	B	B	B	B	B	D	C	$\frac{2009}{2012}$

題號	10	11	12	13	14	15	16
答案	$\int(x)=x+1$	20	6	5	$(50)_n$	$6\sqrt{2}-4$	$\frac{1}{9}\le a<2$

17.解：

因為不同的紅色數字最多有 1、2、3、4、5、6 共 6 種，故寫著相同的黑色數字的卡片至多是 6 張，否則就會出現相同的黑色卡片也寫著相同的紅色數字。又因為黑色數字也是最多有 6 種，而每種黑色數字的卡片不超過 6 張，所以在 36 張中寫著黑色的 1、2、3、4、5、6 數字的卡片各有 6 張。總之在 36 張中一定是 6 種黑色數字每種都有，每種 6 張，且寫著紅色數字 1、2、3、4、5、6 只有一套符合題意的寫法，當然數字積之和是唯一的。寫著黑k(k=1、2、3、4、5、6)的 6 張卡片，數字之積之和是$k(1+2+3+4+5+6)=k\frac{6(6+1)}{2}=21k$，即得總和為 $21(1+2+3+4+5)=21\cdot\frac{6(6+1)}{2}=441$。

18. 解：

設甲鐘、乙鐘一天鐘各快x分、y分，則甲鐘的一小時在正確的鐘上是$\frac{24}{24+\frac{x}{60}}$小時，因而甲鐘的 24 小時，在正確的鐘上是$\frac{24\times24}{24+\frac{x}{60}}$小時，所以在這之間甲鐘快$\frac{24}{24+\frac{x}{60}}\times\frac{x}{24}$分，乙鐘快$\frac{24}{24+\frac{x}{60}}\times\frac{y}{24}$，甲比乙快$\frac{24(x-y)}{24+\frac{x}{60}}$=12……(1)

同樣的乙鐘的 24 小時，在正確的鐘上是$\frac{24\times24}{24+\frac{y}{60}}$小時，所以得$x$+$\frac{24(x-y)}{24+\frac{y}{60}}$=18……(2)

由(1)、(2)得x=$\frac{702}{119}$≈5 分 53.9 秒，y=−$\frac{123}{20}$≈−6 分 9 秒。因而第四天甲鐘在 12 點時乙鐘是 12 時−3×12 分+$\frac{123}{20}$=11 時 30 分 9 秒。