



Seventh IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2011

2011 年第七屆"IMC 國際數學競賽" (新加坡)

國中二年級決賽試題

一、選擇題 (每題 5 分，共 40 分)

1. 已知 $a = \sqrt{26} - \sqrt{19}$ ， $b = \frac{\pi}{3.1416}$ ， $c = 5.3 \times \sqrt{0.0324}$ ， $d = \frac{5}{\sqrt{11} + \sqrt{5}}$ ，在四個

數中，最大的是()。

A. a B. b C. c D. d

2. 在一次函數 $y = 3x + 1$ 的圖像上的點到兩個座標軸距離相等的點有()個。

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 設 $S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{2011^2}$ ，則 S 的整數部分是()。

A. 1 B. 2 C. 3 D. 無法判斷

4. 滿足方程 $xy - 3(x + y) = 5$ 的一組整數 x 、 y 記為 (x, y) ，那麼這樣的數組有()個。

A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

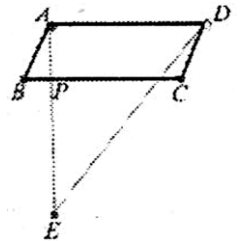
5. If x 、 y 、 z are natural numbers, and $x < y$, $x + y = 2011$, $z - x = 2009$, then the maximum of $x + y + z$ is ().

A. 4020 B. 4021 C. 5025 D. 5026

6. 等邊 $\triangle ABC$ 所在的平面內有點 P ，使得 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PAC$ 都是等腰三角形，那麼具有這樣性質的 P 點的個數是()。

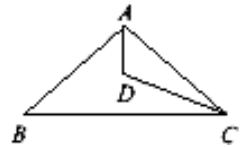
- A. 3 B. 4 C. 10 D. 12

7. 如圖，已知平行四邊形 $ABCD$ ， P 是 BC 邊上的點，且 $AP:PE = 1:4$ ，平行四邊形 $ABCD$ 的面積是10平方公分，則三角形 AED 的面積是()平方公分。



- A. 50 B. 25 C. 20 D. 10

8. 如圖，已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC$ 和 $\angle ACB$ 的平分線相交於 D 點， $\angle ADC = 110^\circ$ ，則 $\angle CAB$ 的大小是()。



- A. 40° B. 70° C. 100° D. 110°

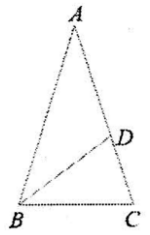
二、填空题 (每題 5 分，共 40 分)

9. 已知 $x = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ ， $y = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ ，則 $(x+1)^2 + (y+1)^2 =$ _____。

10. 已知 $x - y = 1 + \sqrt{2011}$ ， $y - z = 1 - \sqrt{2011}$ ，則 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx =$ _____。

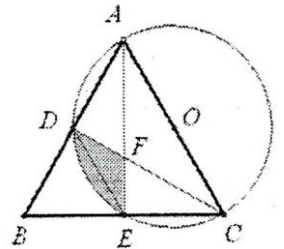
11. 要把一籃子蘋果分給同學們，如果每人分到2個，還剩47個；如果每人分到6個，那麼最後一個同學就會少於6個。那麼蘋果數量最多是_____。

12. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中 $\angle A=36^\circ$ ， $AB=AC$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，若 $\triangle ABD$ 的周長比 $\triangle BCD$ 的周長多2公分，則 BD 的長是_____公分。

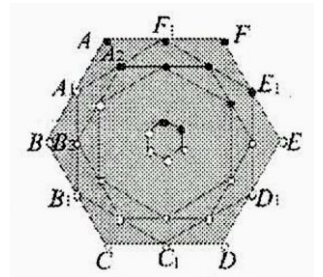


13. 已知由100個正整數1、2、3、...、100順序組成一個192位數，即1234567891011121314...979899100要從中去掉100個數字，使得剩下的數字按原來的排法組成的數字最大，那麼去掉的100的數字和是_____。

14. In figure, if $\triangle ABC$ is equilateral triangle (等邊三角形), AC is diameter of the circle O and $AC = 2\text{cm}$, what is the Area of shaded part? _____.



15. 如圖，有若干個六邊形，從最外層開始第一個正六邊形 $ABCDEF$ 的邊長是1，第二個正六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的頂點是第一個正六邊形的每邊的中點連結而成，第三個正六邊形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 的頂點是第二個正六邊形的每邊的中點連結而成，...，以此類推，到最內層正六邊形 $A_{2011}B_{2011}C_{2011}D_{2011}E_{2011}F_{2011}$ ，則正六邊形 $A_{2011}B_{2011}C_{2011}D_{2011}E_{2011}F_{2011}$ 的邊長是_____。

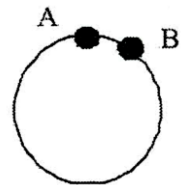


16. 已知方程 $[x] + \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil = 5$ ，其中 $[x]$ 表示不大於 x 的整數部分即 $x-1 \leq [x] \leq x$ ，則滿足方程的 x 的取值範圍是_____。

三、解答題 (每題 10 分，共 20 分)

17. 已知函數 $y = x|x| - 2x - |x|$ ，如果 $-1 \leq x \leq a$ ，求出函數的最小值。

18. 圓周上放有 N 枚棋子，如右下圖所示，B 點的那枚棋子緊鄰 A 點的棋子。某同學首先拿走 B 點處的 1 枚棋子，然後沿順時針方向每隔 1 枚拿走 2 枚棋子，這樣連續轉了 10 周，9 次越過 A。當將要第 10 次越過 A 處棋子取走其他棋子時，小洪發現圓周上餘下 20 多枚棋子。若 N 是 14 的倍數，請精確算出圓周上現在還有多少枚棋子？



2011 年第七屆八年級解答

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9
答案	B	C	A	D	C	C	B	C	48
題號	10	11	12	13	14	15		16	
答案	2014	73	2	346	$\frac{\pi - \sqrt{3}}{6} \text{cm}^2$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}$		$5 \leq x < 6$	

17. (1) 當 $a \leq 0$ 時，即 $-1 \leq x \leq 0$ ，則 $y = -x^2 - x = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ ，那麼當 $x = -1$

時， y 的最小值為 0；

(2) 當 $0 < a \leq \frac{3}{2}$ 時，當 $x > 0$ 時，則 $y = x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ ，所以當 $x = a$

時， y 最小值為 $y = a^2 - 3a$ ；

(3) $a > \frac{3}{2}$ 時，當 $x \geq \frac{3}{2}$ 時，則 $y = x^2 + 3x = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ ，即 y 的最小值為 $-\frac{9}{4}$

18. 設圓周上餘 a 枚棋子，從第 9 次越過 A 處拿走 2 枚棋子到第 10 次將要越過 A 處棋子時，同學拿了 $2a$ 枚棋子，所以在第 9 次將要越過 A 處棋子時，圓周上有 $3a$ 枚棋子……依此類推，在第 8 次將要越過 A 處棋子時，圓周上有 $3^2 a$ 枚棋子，……，在第 1 次將要越過 A 處棋子時，圓周上有 $3^9 a$ 枚棋子，在第 1 次將要越過 A 處棋子之間，同學拿走了 $2(3^9 a - 1) + 1$ 枚棋子，所以 $N = 2(3^9 a - 1) + 1 + 3^9 a = 3^{10} a - 1$ ， $N = 3^{10} a - 1 = 59049a - 1$ 是 14 的倍數， $N = 2$ 和 7 的公倍數所以 a 必須是奇數；又 $N = (7 \times 8435 + 4)a - 1 = 7 \times 8435a + 4a - 1$ ，所以 $4a - 1$ 必須是 7 的倍數。當 $a = 21, 25, 27, 29$ 時， $4a - 1$ 不是 7 的倍數，當 $a = 23$ 時， $4a - 1 = 91 = 7 \times 13$ ，是 7 的倍數，所以，圓周上還有 23 枚棋子。