



Seventh IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2011

2011 年第七屆"IMC 國際數學競賽" (新加坡)

國中一年級決賽試題

一、選擇題 (每題 5 分，共 40 分)

1. Look at the Fig.1, which is correct in the following results?

A. $\frac{1}{a^2} < 1 < \frac{1}{b}$

B. $\frac{1}{b^2} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a^2}$

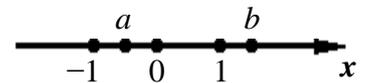


Fig.1

C. $\frac{1}{b} < 1 < \frac{1}{a}$

D. $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b} < \frac{1}{b^2}$

2. 參賽的學生有 500 人，至少有()個人是同一天生日。

A. 2

B. 3

C. 365

D. 500

3. 下列各數的倒數的相反數中最大的是()。

A. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{3}{5}$

C. -1

D. 2011

4. What is the remainder when $2011 \times 11423 \times 1187$ is divided by 7?

A. 0

B. 2

C. 4

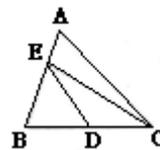
D. 6

5. 若 $\triangle ABC$ 的三個內角 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 關於滿足 $\angle A > 4\angle B$ ， $\angle C < \angle B$ ，則這個三角形是()。

- A. 鈍角三角形 B. 直角三角形
C. 銳角三角形但不等邊 D. 等邊三角形

6. 右圖中，同旁內角共有()對。

- A. 15 B. 18 C. 19 D. 20



7. 有這樣的 10 個數： $2011^3 + 3 \times 2011^2 + 2 \times 2011 \cdot 2010^3 + 3 \times 2010^2 + 2 \times 2010 \cdot 2009^3 + 3 \times 2009^2 + 2 \times 2009 \cdot 2008^3 + 3 \times 2008^2 + 2 \times 2008 \cdot \dots \cdot 2002^3 + 3 \times 2002^2 + 2 \times 2002$ 。在下列的整數中，能整除上述 10 個數中的每一個數的最大整數是()。

- A. 2 B. 3 C. 6 D. 12

8. 某服裝廠，每天能生產甲種服裝 600 件，或生產乙種服裝 750 件，或丙種服裝 900 件，甲、乙、丙三種服裝各一件配成一套，現要求在 150 天內生產最多的成套服裝，那麼最多能生產()套成套服裝。

- A. 30000 B. 36486 C. 36487 D. 36000

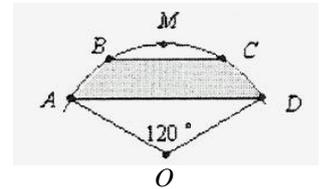
二、填空題 (每題 5 分，共 40 分)

9. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 觀察右列奇數排成的數列。那麼 2011 應在位置是第 _____ 行；從左數第 _____ 個數。

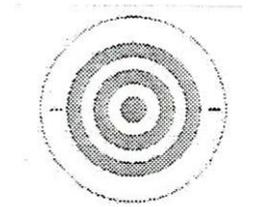
			1			
		3	5	7		
19	9	11	13	15	17	
	21	23	25	27	29	31

11. 如右圖，半徑 10 公分，圓心角為 120° 扇形圖，點 A、B、M、C、D 是將扇形上的弧平均分成五等分，則陰影部分面積是 _____ cm^2 。(取 $\pi=3.14$)



12. 平面上有 8 條直線兩兩相交，則在所有的交角中至少有一個角小於 _____ 度。
13. Let the operation be defined by the equation $a*b=ab-a-b+2$. If $7*b=3$, what is the value of b ? _____.

14. 如右圖，已知最小圓的半徑為 1 公分，外面圓的半徑依次大 1 公分，直到第 2011 個圓，則沿陰影部分的邊界的總和長度為 _____ 公分。(取 $\pi=3$)



15. 已知關於 x 的方程 $(3x-2)a+(2x-3)b=8x-7$ 有無數多個解，那麼 $a=$ _____， $b=$ _____。
16. 某種玩具分別裝在大、中、小 3 種共 50 個包裝盒中，且每個大盒子裝有 70 件，中盒子裝有 30 件，小盒子裝有 20 件，一共裝了 1800 件玩具，大盒子最多有 _____ 個。

三、解答題 (每題 10 分，共 20 分)

17. 觀察以下算式：第一個 1×3 、第二個 2×4 、第三個 3×5 、第四個 4×6 、第五個 5×7 、 \dots 。(1)第 2011 個算式是什麼？(2)求出前 100 個算式的和。

18. 某個劇院在 4 月份中發售戲劇，音樂會和電影票(人數和票價如表)。某公司的員工共有 829 人，每人的花費最少 50 元，最多的是 300 元，且每人只買一次三種票中的一種。已知 121 人花了 50 元，218 人花了 100 元，193 人花了 150 元，那麼花了 200 元、250 元和 300 元的員工各有多少人？

	單價(元/張)	售出的票數
電影	50	318
音樂會	100	420
戲劇	150	465

2 0 1 1 年 第 七 屆 七 年 級 解 答

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	B	D	A	B	C	B
題號	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	$\frac{5}{6}$	32;45	52.33	23	$\frac{4}{3}$	12138396	2,1	15

$$17.(2n-1)(2n+1)=\frac{1}{6}[(2n-1)(2n+1)(2n+3)-(2n-3)(2-1)(2n+1)]$$

$$2n(2n+2)=\frac{1}{6}[2n(2n+2)(2n+4)-(2n-2)2n(2n+2)]$$

$$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6 + 5 \times 7 + 6 \times 8 + \dots + 99 \times 101 + 100 \times 102 = 1 \times 3 + \frac{1}{6}[-1 \times 3$$

$$\times 5 + 3 \times 5 \times 7 - 3 \times 5 \times 7 + 5 \times 7 \times 9 + \dots + (-97 \times 99 \times 101) + 99 \times 101 \times 103] + 2 \times 4$$

$$+ \frac{1}{6}[-2 \times 4 \times 6 + 4 \times 6 \times 8 - 4 \times 6 \times 8 + 6 \times 8 \times 10 + \dots + (-98 \times 100 \times 102) + 100 \times 102$$

$$\times 104] = 1 \times 3 + \frac{1}{6}[-1 \times 3 \times 5 + 99 \times 101 \times 103] + 2 \times 4 + \frac{1}{6}[-2 \times 4 \times 6 + 100 \times 102$$

$$\times 104] = 171650 + 176800 = 348450$$

18. 設只看電影、音樂會、戲劇的人分別有 a 、 b 、 c 人，看電影和音樂會的有 d 人，看電影和戲劇的有 e 人，看音樂會和戲劇的有 f 人，三種都看得有 g 人。由已知得 $a=121$ ， $b=218$ ， $d+c=193$ ，列方程如下：

$$\begin{cases} a+d+e+g=318 \\ b+d+f+g=420 \\ c+e+f+g=465 \\ a+b+c+d+e+f+g=829 \end{cases} \quad \begin{cases} d+e+g=197 \\ d+f+g=202 \\ c+e+f+g=465 \\ e+f+g=297 \end{cases}$$

所以 $c=168$ ， $d=25$ ， $f=125$ ， $g=52$ ， $e=120$

故花了 200 元有 120 人，花了 250 元的有 125 人，花了 300 元的有 52 人。