Sixth IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2010

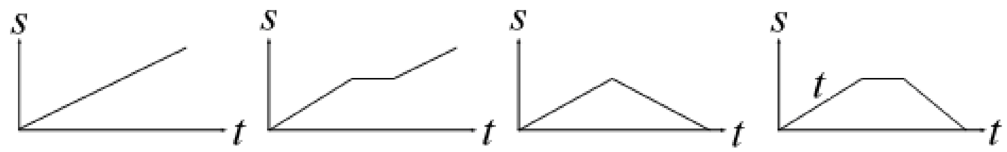
2010 年第六屆"IMC 國際數學競賽"（新加坡）
國中三年級決賽試題

一、選擇題 (每題 5 分，共 40 分)

1. 已知最簡根式 $b\sqrt{3a-2b}$與$\sqrt[a+b]{11}$是同類根式，則滿足條件的 a、b 的值(　　)。

   A. 只有一組　　B. 有兩組　　C. 多於兩組　　D. 不存在

2. 一輛汽車從 M 地駛往 N 地，中途停車休息了一段時間。用橫坐標軸表示時間 t，縱坐標軸表示汽車行駛的路程 s，則在下圖中，能反映路程 s 和時間 t 的函數關係的是(　　)。



   A.　　B.　　C.　　D.

3. 方程 $x^2+2|x|-8=0$ 的最大根與最小根的和是(　　)。

   A. -6　　B. -2　　C. 0　　D. 6

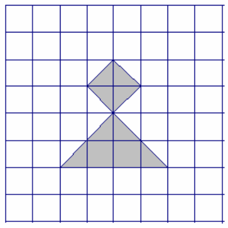
4. The last three-digit of 5^{2010} is (　　).

   A. 5　　B. 25　　C. 125　　D. 625

5. 二次函數 $y=-\frac{1}{2}x^2+1005x+\frac{2011}{2}$ 的圖像經過第一象限的整點坐標(即橫坐標和縱坐標都是正整數的點)共有(　　)個。

A. 2012　　B. 2010　　C. 1007　　D. 1005

6. 某人將鏢隨意投中如下圖所示的正方形木板上，那麼鏢落在陰影部分的可能性是(　　)。



A. $\frac{3}{64}$　　B. $\frac{3}{32}$　　C. $\frac{1}{16}$　　D. $\frac{1}{8}$

7. 下列情況中，公切線最多的是(　　)。

A. 兩圓相交　　B. 兩圓相離　　C. 兩圓外切　　D. 兩圓內切

8. 由數字 1，2，3，4 四個數字組成不同的四位數，將所有組成的四位數相加後被 5 除，商是(　　)。

A. 2　　B. 4　　C. 6666　　D. 13332

二、填空題 (每題 5 分，共 40 分)

9. Let $a=-\frac{3}{8}, b=-2\frac{2}{3}, c=1$, then $-5a^2b+\{-3ab^2c+ac-[-b^2c^2+(2abc+b^2)]\}=$________.

10. In Fig.1, the circular clock above shows a time of exactly 4:30. What is the value of x?________.

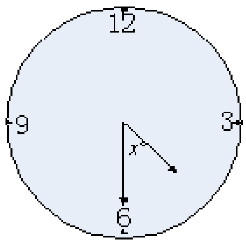


Fig.1

11. 對於有理數 x、y 定義一種運算：$x*y=ax+by+c$，其中 a、b、c 為常數，已知 $3*5=16$，$4*7=30$，則 $1*1=$______。

12. 如圖 2，在平行四邊形 $ABCD$ 中，$AB=20$ 公分，$BC=10$ 公分，$\angle A=30°$，截取 $AE=AH=CG=CF=x$，則四邊形 $EFGH$ 的面積是______。

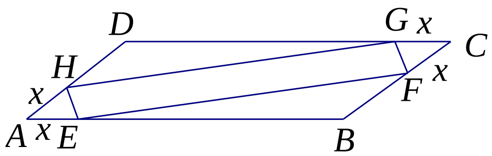


圖 2

13. In a group of 100 students, 38 are enrolled in mathematics, 50 in biology, and 20 in both. If a student were randomly selected from the 100, what is the probability that the student selected would not enrolled in either course?________.

14. The diagram 3 represents a regular pentagon, *ABCDE* inscribed in a circle, centre *O*. The tangents at *A* and *E* meet at *P*. Then the degree of $\angle APE$ is ________.

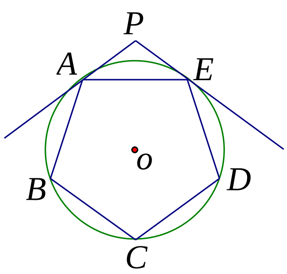
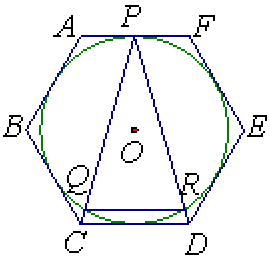


Fig.3

15. 成本價 4 元的小商品按 5 元出售，能賣出 500 件，已知每漲價 1 元，銷售量就減少 20 件，為了得到 1760 元的利潤，售價應定為______。

16. 有 10 根小木棍，長度分別為 1，2，⋯，10，現從這 10 根木棍中選出 3 根構造成三角形。要求三角形最長的邊為 10，另外兩邊之差大於 3，則能構成________個三角形。

三、解答題 (每題 10 分，共 20 分)

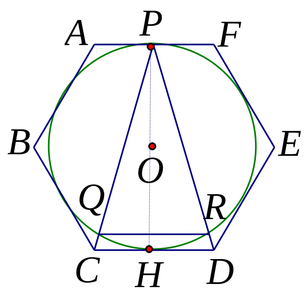


17. 如右圖，⊙O 是正方形 $ABCDEF$ 的內切圓，P 為⊙O 與 AF 邊的切點，Q、R 分別是 PC、PD 與⊙O 的交點。已知正六邊形 $ABCDEF$ 的邊長是 2。求△PQR 的面積。

18. 有一個 4 位正整數，千位上的數字與十位上的數字的差的平方等於千位數字的兩倍；千位、百位、十位上的數字之和剛好是百位與個位數字之積;千位、百位、個位數字之和與十位數字之差為 4，求這個 4 位正整數。

2010 年第六屆九年級解答

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	C	D	D	B	B	D
題號	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	$\frac{15}{2}$	45	-12	16	$\frac{225}{4}\text{cm}^2$	$108°$	26 元或 8 元	6



17. 設 CD 與⊙O 切於 H，連接 PH，

顯然 $PH\perp QP$、$PH\perp CD$，且 $QR\parallel CD$，

$\therefore\triangle PQR\backsim\triangle PCD$，$\therefore\frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta PCD}}=\frac{PQ^2}{PC^2}$。

$\because CD=2$，$CH=1$，$PH=2\sqrt{3}$，$PC=\sqrt{13}$。

又$\because CH^2=CQ\cdot CP$，$\therefore CQ=\frac{CH^2}{PC}=\frac{1}{\sqrt{13}}$，$PQ=PC-CQ=\sqrt{13}-\frac{1}{\sqrt{13}}=\frac{12}{\sqrt{13}}$。

故 $S_{\Delta PQR}=\frac{PQ^2}{PC^2}S_{\Delta PCD}=\frac{PQ^2}{PC^2}\cdot\frac{1}{2}PH\cdot CD=\frac{\frac{12^2}{13}}{13}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2=\frac{288\sqrt{3}}{169}$

18. 設 4 為數為 $\overline{abcd}$，據題意得 $\begin{cases}(a-c)^2=2a & (1)\\ a+b+c=bd & (2)\\ a+b+d-c=4 & (3)\end{cases}$

由(1)式：由於$1\le a\le 9$，故$(a-c)^2$只能取 4 或 16；

情形 1：

當$(a-c)^2=4=2a$ 時，即 $a-c=2$ 或 -2，

當 $a-c=2$ 時：只能 $a=2$，$c=0$，此時不滿足(2)和(3)式，故捨去；

當 $a-c=-2$ 時，$a=2$，$c=4$ 時，

將它們帶入(2)和(3)式，此時$\begin{cases}6+b=bd\\ b+d=6\end{cases}$，

將 $d=6-b$ 代入 $6+b=bd$，得到 $d^2-7d+12=0$，

解得 $d=3$ 或 4，相應地得到 $b=3$ 或 2。

故 4 位數為 2343 或 2244。

情形 2：

$(a-c)^2=16=2a$ 時，只能 $a=8$，$c=4$，不滿足(2)和(3)式，故捨去。