



Sixth IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2010

2010 年第六屆"IMC 國際數學競賽" (新加坡)

國中二年級決賽試題

一、選擇題 (每題 5 分，共 40 分)

1. 若  $a$  為正整數，則  $S = \sqrt{2011 - a} + |a - 2010| + \sqrt{a - 2009}$  的值为 ( )。 A. 0    B. 2    C.  $\sqrt{2} + 1$     D. 2 或  $\sqrt{2} + 1$

2. If  $x$  is a real number and  $y = (x^2 - 5x + 6) \sqrt{\frac{1}{2-x}}$ , then ( )。

A.  $y > 0$     B.  $y \geq 0$     C.  $y \leq 0$     D.  $y < 0$

3. 圖 1，平行四邊形  $ABCD$ ， $AC$  與  $BD$  交於  $O$ ， $AE \perp BD$  於  $E$ ， $CF \perp BD$  於  $F$ ，那麼圖中全等的三角形有 ( ) 對。

A. 5 對    B. 6 對    C. 7 對    D. 8 對

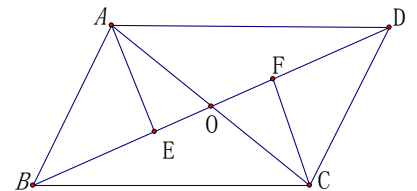
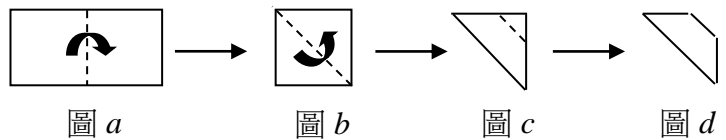
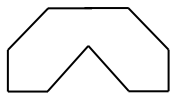


圖 1

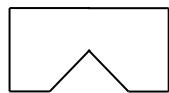
4. 如右圖，將一張長與寬的比為 2:1 的長方形紙片，



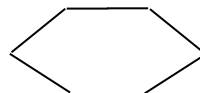
按圖  $a, b$  所示的方式對折，然後沿圖  $c$  中的虛線剪裁，得到圖  $d$ ，最後將圖  $d$  的紙片再展開鋪平，則所得到的圖案是 ( )。



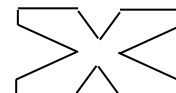
A.



B.



C.



D.

5. 若點  $P$  為  $y$  軸上一點，且到  $A(4,3)$ 、 $B(2,-1)$  的距離之和最小，則點  $P$  的坐標為( )。

- A.  $(0, \frac{5}{3})$       B.  $(0, \frac{3}{2})$       C.  $(0, \frac{1}{3})$       D.  $(0,0)$

6. 若方程  $x^2 - 3x - 2 = 0$  的根是  $x_1$ 、 $x_2$ ，則  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  的值為( )。

- A.  $-\frac{1}{2}$       B.  $-\frac{3}{2}$       C. 1      D. 0

7. If  $k$  is the average of the number  $x$  and  $y$ ,  $m$  is the average of the number of  $k$  and  $z$ ,  $n$  is the average of the number of  $x$ ,  $y$  and  $z$ , then the relation between the number  $m$  and  $n$  is ( ) .

- A.  $m > n$       B.  $m < n$       C.  $m = n$       D. not sure

8. 如圖 2 中的圖像(折線  $ABCDE$ )描述了一輛汽車在某一直線上的行駛過程中，汽車離出發地的距離  $s$  (公里)和行駛時間  $t$  (小時)之間的函數關係，根據圖中提供的信息，給出下列說法：①汽車共行駛了 120 公里；②汽車在行駛途中停留了 0.5 小時；③汽車在整個行駛過程中的平均速度為  $\frac{80}{3}$  公里/小時；④汽車自出發後 3 小時至 4.5 小時之間行駛的速度在逐漸減少。其中正確的說法共有( )個。

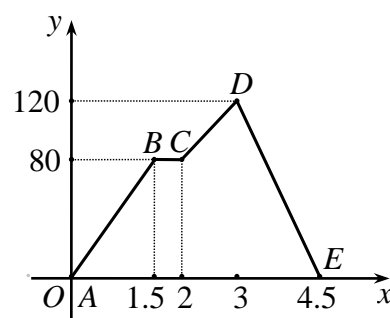


圖 2

①汽車共行駛了 120 公里；②汽車在行駛途中停留了 0.5 小時；③汽車在整個行駛過程中的平均速度為  $\frac{80}{3}$  公里/小時；④汽車自出發後 3 小時至 4.5 小時之間行駛的速度在逐漸減少。其中正確的說法共有( )個。

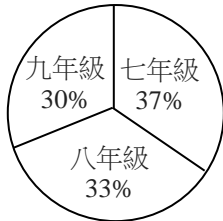
- A. 1 個      B. 2 個      C. 3 個      D. 4 個

## 二、填充題 (每題 5 分，共 40 分)

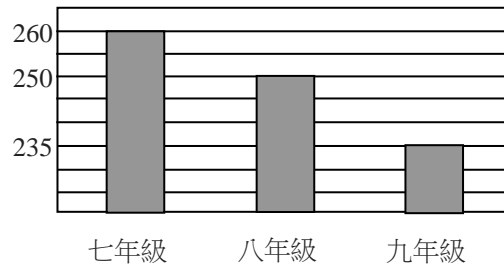
9.  $9x^2 - mxy + 16y^2$  是一個完全平方式，則  $m$  的值為\_\_\_\_\_。

10. 某校公佈了該校反映各年級學生體育達標情況的兩張統計圖(如下圖)，該校七、八、九三個年級共有學生 800 人。甲、乙、丙三個同學看了這兩張統計圖後，甲說：“七年級的體育達標率最高。”乙說：“八年級共有學生 264 人。”丙說：“九年級的體育達標率最高。”甲、乙、丙三個同學中，說法正確的是\_\_\_\_\_同學。

各年級人數分佈情況



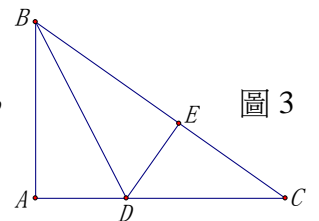
達標人數



11. 已知一元二次方程  $(k-2)x^2 + (k+4)x - k^2 + 4 = 0$  有零根，其中  $k$  為實數，則  $k$  的值為\_\_\_\_\_。

12. 按一定規律排列的一列數依次為： $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{9}{10}, \frac{14}{15}, \frac{25}{26}, \frac{34}{35} \dots$ ，按此規律排列下去，這列數中的第  $n(n \geq 1)$  個數是\_\_\_\_\_。

13. 如圖 3，在  $\triangle ABC$  中， $\angle A = 90^\circ$ ， $BD$  平分  $\angle ABC$ ， $DE \perp BC$  於  $E$ ，若  $\triangle ABD$  與  $\triangle DBC$  的面積比為 3 : 8，則  $\triangle CDE$  與  $\triangle BAC$  的面積比為\_\_\_\_\_。



14. If  $a, b, c, d, e, f$  are prime numbers and  $x_1 = abc, x_2 = acd, x_3 = ade, x_4 = abe, y_1 = fbc, y_2 = fcd, y_3 = fde, y_4 = fbe, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 140$ , then the sum of  $a, b, c, d, e, f$  is\_\_\_\_\_.

15. 已知四位數  $\overline{abcd}$  是 11 的倍數，且有  $b+c=a$ ， $bc$  是完全平方數，則這樣的四位數有\_\_\_\_\_個。

16. 已知  $a$  為非負整數，若關於  $x$  的方程  $2x - a\sqrt{1-x} - a + 4 = 0$  至少有一個整數根，則  $a$  可取值的個數為\_\_\_\_\_。

三、解答題 (每題 10 分，共 20 分)

17. 如圖 4，在直角坐標平面內，函數  $y = \frac{m}{x}$  ( $x > 0$ ,  $m$  是常數) 圖像經過  $A(1,4)$ ,  $B(a,b)$ ，其中  $a > 1$ 。過點  $A$  作  $x$  軸垂線，垂足為  $C$ ，過點  $B$  作  $y$  軸垂線，垂足為  $D$ ，連結  $AD$ ,  $DC$ ,  $CB$ 。

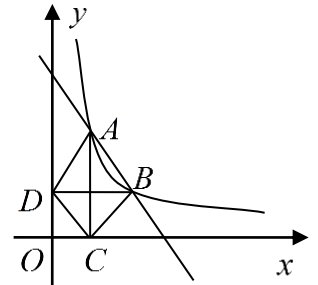


圖 4

- (1) 若  $\triangle ABD$  的面積為 4，求點  $B$  的坐標；
- (2) 當  $AD = BC$  時，求直線  $AB$  的函數解析式。

18. 給定有限個正數滿足條件  $T$ : 每個數都不大於 50 且總和  $L = 1275$ 。現將這些數按下列要求進行分組，每組數之和不大于 150 且分組的步驟是：首先，從這些數中選擇這樣一些數構成第一組，使得 150 與這組數之和的差  $r_1$  與所有可能的其他選擇相比是最小的， $r_1$  稱為第一組餘差；然後，在去掉已選入第一組的數後，對余下的數按第一組的選擇方式構成第二組，這時的餘差為  $r_2$ ；如此繼續構成第三組(餘差為  $r_3$ )、第四組(餘差為  $r_4$ )、 $\dots$ ，直至第  $N$  組(餘差為  $r_N$ )把這些數全部分完為止。

- (1) 判斷  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_N$  的大小關係，並指出除第  $N$  組外的每組至少含有幾個數；
- (2) 當構成第  $n$  ( $n < N$ ) 組後，指出余下的每個數與  $r_n$  的大小關係，並證明  $r_{n-1} > \frac{150n-L}{n-1}$ 。

2010 年 第 六 屆 八 年 級 解 答

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	A	C	B	D	A
題號	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	$\pm 24$	乙、丙	$-2$	$\frac{n^2 - 1 + (-1)^{n+1}}{n^2 + (-1)^{n+1}}$	$5 : 11$	16	23	3

17. (1)  $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}a(4-b) = 4$ ，又  $ab = 4$ ，解得  $a = 3$ ， $b = \frac{4}{3}$ 。

(2)  $(4-b)^2 + 1 = (a-1)^2 + b^2$ ，又  $ab = 4$ ，

解得  $a = 2$ ， $b = 2$  或  $a = 4$ ， $b = 1$ ，

即  $2x + y - 6 = 0$  或  $x + y - 5 = 0$ 。

18. (1)  $r_1 \leq r_2 \leq r_N$ ，除第  $N$  組外的每組至少含有  $\frac{150}{50} = 3$  個數。

(2) 當第  $n$  組形成後，因為  $n < N$ ，所以還有數沒分完，這時餘下的每個數必大於餘差  $r_n$ ，餘下數之和也大於第  $n$  組的餘差  $r_n$ ，

即  $L - [(150 - r_1) + (150 - r_2) + \dots + (150 - r_n)] > r_n$ ，

由此可得  $r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1} > 150n - L$ ，

因為  $(n-1)r_{n-1} \geq r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1}$ ，所以  $r_{n-1} > \frac{150n - L}{n-1}$ 。