



Sixth IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2010

2010 年第六屆"IMC 國際數學競賽" (新加坡)

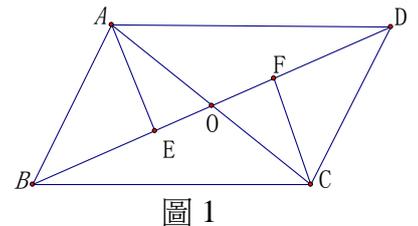
國中二年級決賽試題

一、選擇題 (每題 5 分，共 40 分)

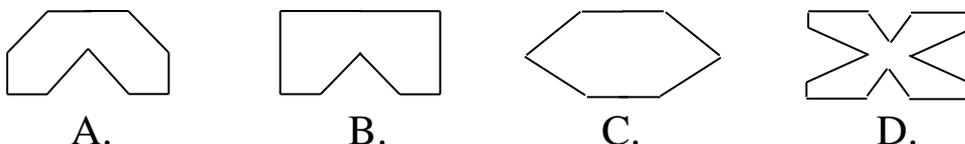
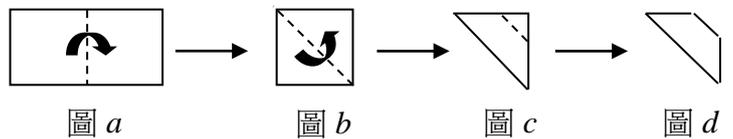
1. 若 a 為正整數，則 $S = \sqrt{2011 - a} + |a - 2010| + \sqrt{a - 2009}$ 的值为 ()。 A. 0 B. 2 C. $\sqrt{2} + 1$ D. 2 或 $\sqrt{2} + 1$

2. If x is a real number and $y = (x^2 - 5x + 6) \sqrt{\frac{1}{2-x}}$, then ().
 A. $y > 0$ B. $y \geq 0$ C. $y \leq 0$ D. $y < 0$

3. 圖 1，平行四邊形 $ABCD$ ， AC 與 BD 交於 O ， $AE \perp BD$ 於 E ， $CF \perp BD$ 於 F ，那麼圖中全等的三角形有 () 對。
 A. 5 對 B. 6 對 C. 7 對 D. 8 對



4. 如右圖，將一張長與寬的比為 2:1 的長方形紙片，
 按圖 a, b 所示的方式對折，然後沿圖 c 中的虛線剪裁，得到圖 d，
 最後將圖 d 的紙片再展開鋪平，則所得到的圖案是 ()。



5. 若點 P 為 y 軸上一點，且到 $A(4,3)$ 、 $B(2,-1)$ 的距離之和最小，則點 P 的坐標為()。

- A. $(0, \frac{5}{3})$ B. $(0, \frac{3}{2})$ C. $(0, \frac{1}{3})$ D. $(0,0)$

6. 若方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 的根是 x_1 、 x_2 ，則 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值為()。

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. 1 D. 0

7. If k is the average of the number x and y , m is the average of the number of k and z , n is the average of the number of x , y and z , then the relation between the number m and n is () .

- A. $m > n$ B. $m < n$ C. $m = n$ D. not sure

8. 如圖 2 中的圖像(折線 $ABCDE$)描述了一輛汽車在某一直線上的行駛過程中，汽車離出發地的距離 s (公里)和行駛時間 t (小時)之間的函數關係，根據圖中提供的信息，給出下列說法：①汽車共行駛了 120 公里；②汽車在行駛途中停留了 0.5 小時；③汽車在整個行駛過程中的平均速度為 $\frac{80}{3}$ 公里/小時；④汽車自出發後 3 小時至 4.5 小時之間行駛的速度在逐漸減少。其中正確的說法共有()個。

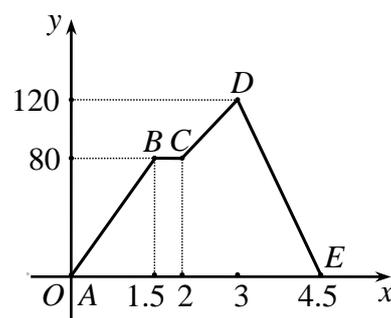


圖 2

①汽車共行駛了 120 公里；②汽車在行駛途中停留了 0.5 小時；③汽車在整個行駛過程中的平均速度為 $\frac{80}{3}$ 公里/小時；④汽車自出發後 3 小時至 4.5 小時之間行駛的速度在逐漸減少。其中正確的說法共有()個。

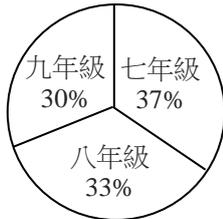
- A. 1 個 B. 2 個 C. 3 個 D. 4 個

二、填充題 (每題 5 分，共 40 分)

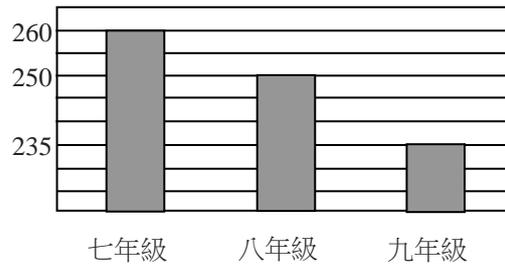
9. $9x^2 - mxy + 16y^2$ 是一個完全平方式，則 m 的值為_____。

10. 某校公佈了該校反映各年級學生體育達標情況的兩張統計圖(如下圖)，該校七、八、九三個年級共有學生 800 人。甲、乙、丙三個同學看了這兩張統計圖後，甲說：“七年級的體育達標率最高。”乙說：“八年級共有學生 264 人。”丙說：“九年級的體育達標率最高。”甲、乙、丙三個同學中，說法正確的是_____同學。

各年級人數分佈情況



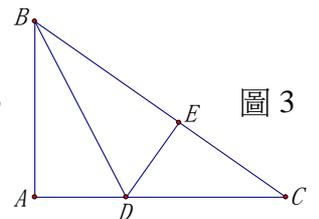
達標人數



11. 已知一元二次方程 $(k-2)x^2 + (k+4)x - k^2 + 4 = 0$ 有零根，其中 k 為實數，則 k 的值為_____。

12. 按一定規律排列的一列數依次為： $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{9}{10}, \frac{14}{15}, \frac{25}{26}, \frac{34}{35} \dots$ ，按此規律排列下去，這列數中的第 $n(n \geq 1)$ 個數是_____。

13. 如圖 3，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ， $DE \perp BC$ 於 E ，若 $\triangle ABD$ 與 $\triangle DBC$ 的面積比為 3 : 8，則 $\triangle CDE$ 與 $\triangle BAC$ 的面積比為_____。



14. If a, b, c, d, e, f are prime numbers and $x_1 = abc, x_2 = acd, x_3 = ade, x_4 = abe, y_1 = fbc, y_2 = fcd, y_3 = fde, y_4 = fbe, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 140$, then the sum of a, b, c, d, e, f is_____.

15. 已知四位數 \overline{abcd} 是 11 的倍數，且有 $b+c=a, bc$ 是完全平方數，則這樣的四位數有_____個。

16. 已知 a 為非負整數，若關於 x 的方程 $2x - a\sqrt{1-x} - a + 4 = 0$ 至少有一個整數根，則 a 可取值的個數為_____。

三、解答題 (每題 10 分，共 20 分)

17. 如圖 4，在直角坐標平面內，函數 $y = \frac{m}{x}$ ($x > 0$, m 是常數) 圖像經過 $A(1,4)$, $B(a,b)$ ，其中 $a > 1$ 。過點 A 作 x 軸垂線，垂足為 C ，過點 B 作 y 軸垂線，垂足為 D ，連結 AD , DC , CB 。

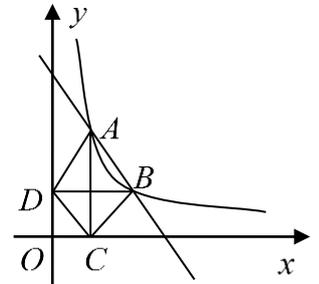


圖 4

- (1) 若 $\triangle ABD$ 的面積為 4，求點 B 的坐標；
- (2) 當 $AD = BC$ 時，求直線 AB 的函數解析式。

18. 給定有限個正數滿足條件 T : 每個數都不大於 50 且總和 $L = 1275$ 。現將這些數按下列要求進行分組，每組數之和不大于 150 且分組的步驟是：首先，從這些數中選擇這樣一些數構成第一組，使得 150 與這組數之和的差 r_1 與所有可能的其他選擇相比是最小的， r_1 稱為第一組餘差；然後，在去掉已選入第一組的數後，對余下的數按第一組的選擇方式構成第二組，這時的餘差為 r_2 ；如此繼續構成第三組(餘差為 r_3)、第四組(餘差為 r_4)、 \dots ，直至第 N 組(餘差為 r_N)把這些數全部分完為止。

- (1) 判斷 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_N$ 的大小關係，並指出除第 N 組外的每組至少含有幾個數；
- (2) 當構成第 n ($n < N$) 組後，指出餘下的每個數與 r_n 的大小關係，並證明 $r_{n-1} > \frac{150n-L}{n-1}$ 。

2010 年 第 六 屆 八 年 級 解 答

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	A	C	B	D	A
題號	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	± 24	乙、丙	-2	$\frac{n^2 - 1 + (-1)^{n+1}}{n^2 + (-1)^{n+1}}$	5 : 11	16	23	3

17. (1) $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}a(4-b) = 4$ ，又 $ab = 4$ ，解得 $a = 3$ ， $b = \frac{4}{3}$ 。

(2) $(4-b)^2 + 1 = (a-1)^2 + b^2$ ，又 $ab = 4$ ，

解得 $a = 2$ ， $b = 2$ 或 $a = 4$ ， $b = 1$ ，

即 $2x + y - 6 = 0$ 或 $x + y - 5 = 0$ 。

18. (1) $r_1 \leq r_2 \leq r_N$ ，除第 N 組外的每組至少含有 $\frac{150}{50} = 3$ 個數。

(2) 當第 n 組形成後，因為 $n < N$ ，所以還有數沒分完，這時餘下的每個數必大於餘差 r_n ，餘下數之和也大於第 n 組的餘差 r_n ，

即 $L - [(150 - r_1) + (150 - r_2) + \dots + (150 - r_n)] > r_n$ ，

由此可得 $r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1} > 150n - L$ ，

因為 $(n-1)r_{n-1} \geq r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1}$ ，所以 $r_{n-1} > \frac{150n - L}{n-1}$ 。