



Sixth IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2010

2010 年第六屆"IMC 國際數學競賽" (新加坡)

國中一年級決賽試題

一、選擇題 (每題 5 分，共 40 分)

1. 若 $|a|=2010$ ，則以下式子中成立的是()。

A. $|a|-(a+0.2010)>0$

B. $a-|a|>0$

C. $|a|+a>0$

D. $|a|+\frac{1}{a}>0$

2. 已知 $a_1+a_2=1$ 、 $a_2+a_3=2$ 、 $a_3+a_4=3$ 、 $a_4+a_5=4$ 、 \dots 、 $a_{50}+a_{51}=50$ 、 $a_{51}+a_1=51$ ，那麼 $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{51}=(\quad)$ 。

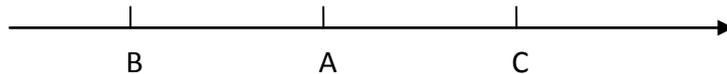
A. 663

B. 1326

C. 1076

D. 538

3. 如圖，在數軸上(未標出原點及單位長度)，點 A 是線段 BC 的中點，已知點 A、B、C 對應的三個數 a 、 b 、 c 之積是負數，這三數之和與其中一數相等，設 p 為 a 、 b 、 c 三數中兩數的比值，則 p 的()。



A. 最大值為 2，最小值為 -2

B. 最大值為 2，最小值為 -3

C. 最大值為 3，最小值為 -3

D. 最大值為 3，最小值為 -2

4. 四個電子寵物排座位，一開始，小鼠、小猴、小兔、小貓分別坐在 1、2、3、4 號座位上（如圖 1 所示），以後它們不停地變換位置，第一次上下兩排交換，第二次是在第一次換位後，再左右兩列交換位置，第三次再上下兩排交換，第四次再左右兩列交換……這樣一直下去，則第 2010 次交換位置後，小兔所在的號位是（ ）。

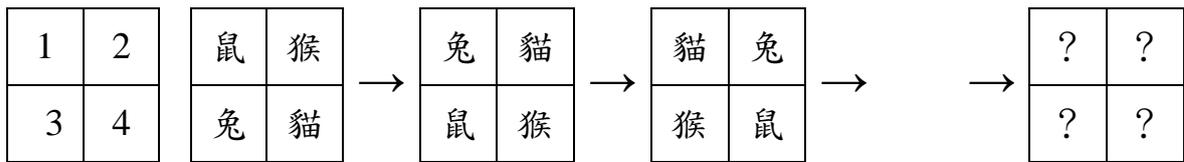


圖 1

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
5. Please solve the equation $x^3 + 6x^2 - 27x = 0$, and find out its real roots.
- A. $x_1 = 0, x_2 = -3, x_3 = 9$ B. $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 9$
 C. $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -9$ D. $x_1 = 0, x_2 = -3, x_3 = -9$
6. There are three real numbers, a , b , and c . If $a > b > c$, and the average of a , b , and c is M , the average of a and b is N , the average of N and c is P , please compare the magnitude of M and P ().
- A. $M = P$ B. $M > P$ C. $M < P$ D. Uncertain
7. a , b , c and d are four numbers, to define an operation: $[a \cdot b \cdot c \cdot d] = ad - bc$, please find out the values of x , which meet the operation: $[x \cdot 2 \cdot x \cdot x] = 8$.
- A. -2 or 4 B. 2 or 4 C. 2 or -4 D. -2 or -4

8. In Fig.2, the area of $\triangle ABC$ is 27 cm^2 , and $BD:BC=1:3$, $AF:AD=1:3$, then the area of shaded part is () cm^2 .

- A. $\frac{6}{7}$ B. 1 C. 3 D. 6

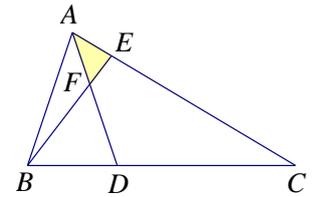


Fig.2

二、填充題 (每題 5 分，共 40 分)

9. 在 1、3、5、 \dots 、2011 這 1006 個數的前面任意添加一個正號或一個負號，其代數和的絕對值最小值是_____。

10. 已知三個連續自然數的平方的倒數和為 $\frac{769}{3600}$ ，求這三個連續自然數為_____。

11. The solution of the equation $x + \frac{x}{1+2} + \frac{x}{1+2+3} + \dots + \frac{x}{1+2+\dots+2010} = 2010$ is $x =$ _____.

12. 如圖 3，線段 $BD = \frac{2}{5}AB = \frac{1}{3}CD$ ，點 M 、 N 分別為線段 AB 、 CD 的中點，且 $MN = 14\text{cm}$ ，則 AC 長為_____ cm 。



圖 3

13. 小明背對小亮，讓小亮按下列四個步驟操作：第一步：分發左、中、右三堆牌，每堆牌不少於三張，且各堆牌現有的張數相同；第二步：從左邊一堆拿出三張，放入中間一堆；第三步：從右邊一堆拿出二張，放入中間一堆；第四步：左邊一堆有幾張牌，就從中間一堆拿幾張牌放入左邊一堆。這時，小明準確說出了中間一堆牌現有的張數。你認為中間一堆牌現有的張數是_____。

14. 袋子裡裝有紅色球 2 個，黃色球一個，藍色球一個。若規定：摸到紅色球得 5 分，摸到黃色球得 3 分，摸到藍色球得 1 分，小明共摸了 6 次小球（每次摸一個球，摸後放回）得 20 分，那麼小明有_____種摸球的方法。
15. 2010 年 8 月 8 日是星期日，之後的第一天是 8 月 9 日，那麼第 3^{2010} 天是星期_____。
16. 紅墨水 800ml 置於甲燒杯中，藍墨水 400ml 置於乙燒杯中，用一支容積為 50ml 的小燒杯，從甲杯中盛滿一小燒杯紅墨水倒入乙杯中，這時，當乙杯中紅藍墨水混合均勻後，仍用這個小燒杯，盛滿 50ml 混合液，倒入甲杯中，問最後乙杯中混入的紅墨水有_____ml。

三、解答題（每題 10 分，共 20 分）

17. 比較 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{99}{100}$ 與 $\frac{1}{10}$ 的大小。

18. 甲、乙兩個書架都放有圖書。若從甲書架拿 90 本放到乙書架，則乙書架的書是甲書架的 2 倍；如果從乙書架中拿若干本放到甲書架，則甲書架的書是乙書架的 6 倍。問甲書架原來最少有書多少本？

2010 年 第 六 屆 七 年 級 解 答

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	B	C	B	A	A
題號	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	0	3、4、5	$\frac{2011}{2}$	36	8	3	—	$44\frac{4}{9}$

$$17. \because \frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \frac{5}{6} < \frac{6}{7}, \dots, \frac{99}{100} < \frac{100}{101},$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{100}{101}, \text{ 兩邊乘以 } \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100}, \text{ 得}$$

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100}\right)^2 < \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{100}{101}\right) = \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

18. 設甲書架原來有書 x 本，乙書架原來有書 y 本，

$$\text{依題意：} 2(x-90) = y+90 \text{ ----- (1)}$$

$$\text{再設乙書架拿 } z \text{ 本到甲書架，即 } x+z = 6(y-z) \text{ ---(2)}$$

$$\text{由(1)得 } y = 2x - 270 \text{ -----(3)}$$

$$\text{把(3)代入(2)得 } 11x - 7z = 1620, \text{ 得 } z = \frac{11x-1620}{7} = x - 232 + \frac{4(x+1)}{7}$$

$$x、z \text{ 是正整數，有 } z = \frac{11x-1620}{7} \geq 1, x \geq 148$$