



第 17 屆 **IMC** 國際數學競賽 台灣區初賽

17th International Mathematics Primary Contest (Taiwan)

國中二年級組

一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

(A) 1.

學生	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
成績記法	+20	-1	+14	-5	?	-4	-7	+3

期末考試若以 73 分為標準，上列 8 位學生與 73 分比較情形如右表，例如：甲生考 93 分，記為+20。若已知此 8 位學生的平均分數為 77 分，則戊生的成績應記為多少? (A)+12 (B)+3 (D)+2 (D)+1

<解析>

$$20-1+14-5-4-7+3=20$$

$$(77-73) \times 8 - 20 = 12, \text{ 選 A。}$$

(B) 2.如右圖，有一測驗共有四題是非題，正確填○，錯誤填×。第 1 題答對得 6 分，第 2 題答對得 12 分，第 3 題答對得 24 分，第 4 題答對得 48 分，最後再加 10 分就是總得分。若某生四題皆填○，則該生可得幾分?

是非題:

$$() 1. 3^8 \div 3^4 \times 3^2 = 3^6$$

$$() 2. (-21)^6 \div 7^6 = 3^6$$

$$() 3. (-5^3) \times (-5^7) = -5^{10}$$

$$() 4. 6^{10} \times 4^{10} = 24^{10}$$

(A)64 (B)76 (C)88 (D)94

<解析>

$$3^8 \div 3^4 \times 3^2 = 3^4 \times 3^2 = 3^6, \quad (-21)^6 \div 7^6 = (3^6 \times 7^6) \div 7^6 = 3^6$$

$$(-5^3) \times (-5^7) = 5^3 \times 5^7 = 5^{10}, \quad 6^{10} \times 4^{10} = 24^{10}$$

$$\therefore \text{得分} = 6 + 12 + 48 + 10 = 76, \text{ 選 B。}$$

(D) 3.用科學符號(即科學記號)可以將 2006 表示成「 2.006×10^3 」。設甲數= $0.001875 \times 0.0006584$ ，小屏使用計算機時只輸入「 1875×6584 」，螢幕顯示計算結果為「12345000」，請問用科學記號可將甲數表示為下列何者?

(A) 12345×10^3 (B) 1.2345×10^7 (C) 1.2345×10^{-5} (D) 1.2345×10^{-6}

<解析>

$$\therefore 1875 \times 6584 = 12345000 = 1.2345 \times 10^7$$

$$\text{則甲數} = 0.001875 \times 0.0006584 = 1875 \times 10^{-6} \times 6584 \times 10^{-7} = 1.2345 \times 10^7 \times 10^{-6} \times 10^{-7} = 1.2345 \times 10^{-6}$$

選 D。

(C) 4.某校舉辦校慶園遊會，學校想將長 140 公尺、寬 84 公尺的籃球場平均分割成大小相同的正方形而無剩餘，給本校 60 個班級設攤位，若正方形之邊長為整數且每一班恰好分配到一塊正方形，則正方形之邊長為幾公尺?

(A)10 (B)12 (C)14 (D)16 公尺

<解析>

$$(140, 84)=28$$

28 的因數=1、2、4、7、14、28

$$140 \times 84 \div (28 \times 28) = 15 (\text{不合})$$

$$140 \times 84 \div (14 \times 14) = 60, \text{ 邊長要 } 14 \text{ 公尺, 選 C。}$$

(C)5. 蓁蓁寫數學題目時發現只要把數字 abc 寫兩遍，就變成 abcabc，例如:543 寫兩遍就成為 543543，接著把該數字先除以 x，再除以 y，最後除以 z 就得到原來的數字 543，試求 $x+y+z=?$ (A)13 (B)25 (C)31 (D)47

<解析>

$$abcabc \div abc = 1001$$

$$1001 = 7 \times 11 \times 13$$

$$7 + 11 + 13 = 31$$

選 C。

(B)6. 求 $10^2 \times 100^3 \times 1000^3 \times 10000^2$ 的乘積中，尾數共有幾個零?(A)12 (B)25 (C)35 (D)45 個

<解析>

$$10^2 \times 100^3 \times 1000^3 \times 10000^2 = 10^2 \times (10^2)^3 \times (10^3)^3 \times (10^4)^2 = 10^{25}$$

選 B。

(B)7. 在 2008 年 12 月的月曆上用一個長方形任意框選九個數，例如可框選 2、3、4、9、10、11、16、17、18，如圖所示，可得這九個數的和為 90，請問所框選出的九個數的和不可能為下列哪一個數?
(A)99 (B)102 (C)117 (D)180

星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

<解析>

假設中間數為 x，其餘 8 個數為 x-8、x-7、x-6、x-1、x+1、x+6、x+7、x+8

$$\text{其和} = (x-8) + (x-7) + (x-6) + x + (x-1) + (x+1) + (x+6) + (x+7) + (x+8) = 9x$$

所以九個數的和必為 9 的倍數，選 B。

(C)8. 昱傑爸爸工廠裡有一磅秤，只能秤大於 100 公斤重的物品，昱傑需秤 3 袋小於 100 公斤的水果，於是他每次秤不同的二袋，共秤了三次，分別得到 108 公斤、117 公斤及 123 公斤，最重的一袋和最輕的一袋相差多少公斤?
(A)13 (B)14 (C)15 (D)16

<解析>

設三袋分別為 x、y、z

$$\begin{cases} x+y=108 \\ y+z=117 \rightarrow 2x+2y+2z=348, x+y+z=174 \\ x+z=123 \end{cases}$$

$$z=174-108=66, y=174-123=51, x=174-117=57$$

故 $66-51=15$ ，選 C。

(A)9.在直角坐標平面上，直線 L 的方程式為 $x+ky+2=0$ ，P、Q 兩點的坐標分別是 (7, 3)和(2, -1)，今將 P 點向左移動 3 個單位後，P 點才會落在直線上，請問 Q 點應如何移動才會落在直線 L 上？

- (A)向上移動 3 個單位 (B)向下移動 3 個單位
(C)向左移動 3 個單位 (D)向右移動 3 個單位

<解析>

P 點(7,3)向左移動 3 個單位，新坐標(4,3)

$$\therefore 4+3k+2=0, k=-2$$

故直線方程式: $x-2y+2=0$ ，且 Q(2,-1)

$$x=2 \text{ 代入 } 2-2y+2=0, y=2$$

Q 點需向上移動 $2-(-1)=3$ ，

$$y=-1 \text{ 代入 } x+2+2=0, x=-4$$

Q 點需向左移動 $2-(-4)=6$ ，選 A。

(A)10.已知甲、乙、丙三個杯子內各裝有一些果汁，若將甲杯中 $\frac{1}{5}$ 的果汁和乙杯中 $\frac{1}{4}$ 的果汁倒進丙杯後(果汁未溢出)，三個杯子內的果汁一樣多，則甲、乙、丙三個杯子內原有果汁的比依序應為下列哪一個選項？

- (A)15:16:5 (B)16:15:2 (C)12:15:8 (D)320:300:17

<解析>

$$\text{甲} \times \frac{4}{5} = \text{乙} \times \frac{3}{4} = \text{丙} + \frac{1}{5} \times \text{甲} + \frac{1}{4} \times \text{乙}$$

$$\text{甲} \times \frac{4}{5} = \text{乙} \times \frac{3}{4} \rightarrow 16 \text{ 甲} = 15 \text{ 乙}, \text{乙} = \frac{16}{15} \text{ 甲}, \text{代入}$$

$$\frac{16}{15} \times \text{甲} \times \frac{3}{4} = \text{丙} + \frac{1}{5} \times \text{甲} + \frac{1}{4} \times \frac{16}{15} \text{ 甲}, \text{丙} = \frac{1}{3} \text{ 甲}$$

故甲:乙:丙=甲: $\frac{16}{15}$ 甲: $\frac{1}{3}$ 甲=15:16:5，選 A。

(D)11.馬戲團表演中，有一種特殊的腳踏車，這種腳踏車的前輪很大，後輪很小，前後輪的半徑比為 8:3，特技人員騎著這種腳踏車表演，如果前輪轉了 144 圈，求後輪轉了多少圈?(A)144 (B)156 (C)264 (D)384 圈

<解析>

$$\text{半徑比}=8:3 \rightarrow \text{周長比}=8:3$$

同一路程，前後輪轉的圈數與周長成反比

∴ 圈數比 = $\frac{1}{8} : \frac{1}{3} = 3 : 8$, $144 \times \frac{8}{3} = 384$, 選 D。

- (D) 12. 芳宜全班共有 33 位學生，其中有 17 位是男生。第二次段考數學成績公布，該校同年級此次段考數學平均最差為 56 分，最好為 62 分，已知芳宜班成績在同年級排名不是最差，也不是最好。若芳宜班上女生比男生平均分數多 2 分，則下列何者錯誤？
- (A) 芳宜班平均可能是 59.45 分
(B) 芳宜班女生平均分數可能為 59 分
(C) 芳宜班男生平均分數可能為 59 分
(D) 若芳宜班女生平均分數為 63.5 分，則男生平均分數為 61.5 分

<解析>

設男生平均分數為 x 分

$$56 < \frac{17x + 16(x+2)}{33} < 62 , 55\frac{1}{33} < x < 61\frac{1}{33}$$

選 D。

- (D) 13. 某籃球隊隊員共 16 人，每人投籃 6 次，且右表為其投進球數的次數分配表，若此隊進球數的中位數是 3.5 球，則眾數為幾球？(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 球

投進球數(球)	0	1	2	3	4	5	6
次數(人)	1	2	3	a	b	2	2

<解析>

∴ 中位數 = 3.5

∴ $1+2+3+a=8$ 且 $b+2+2=8$

→ $a=2$, $b=4$

眾數 = 4 , 選 D

- (B) 14. 設 $a = 197^2 + 197 \times 6 + 3^2$, $b = 206 \times 194$, $c = 200^2 - 3^2$, 則下列有關 a 、 b 、 c 三數的大小關係，何者正確？(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > c > a$ (D) $b > a > c$

<解析>

$$a = 197^2 + 197 \times 6 + 3^2 , a = (197 + 3)^2 = 200^2$$

$$b = 206 \times 194 , b = (200 + 6)(200 - 6) = 200^2 - 6^2$$

$$c = 200^2 - 3^2$$

∴ $a > c > b$, 選 B。

- (A) 15. 有一數學題「兩個一元二次式 A、B，B 為 $3x^2 + 2x - 4$ ，試求 $2A + 3B = ?$ 」宛菱誤將「 $3B$ 」看成「 $6B$ 」，求出答案為 $20x^2 + 14x - 26$ ，則 $2A + 3B$ 的正確答案為何？
- (A) $11x^2 + 8x - 14$ (B) $11x^2 - 8x + 14$ (C) $12x^2 + 9x - 11$ (D) $12x^2 - 9x + 11$

<解析>

$$\because 2A + 6B = 20x^2 + 14x - 26 , 3B = 3 \times (3x^2 + 2x - 4) = 9x^2 + 6x - 12$$

$\therefore 2A+3B=20x^2+14x-26-(9x^2+6x-12)=11x^2+8x-14$ ，選 A。

(D)16.將一多項式 $[(17x^2-3x+4)-(ax^2+bx+c)]$ ，除以 $(5x+6)$ 後，得商式為 $(2x+1)$ ，餘式為0，求 $a \times b \times c=?$ (A)130 (B)260 (C)140 (D)280

<解析>

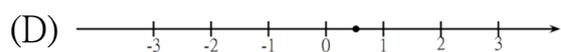
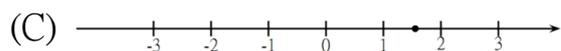
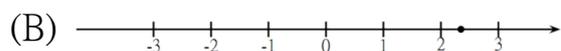
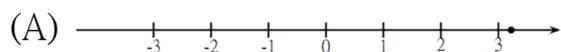
$$[(17x^2-3x+4)-(ax^2+bx+c)]=(5x+6)(2x+1)=10x^2+17x+6$$

$$\therefore (ax^2+bx+c)=17x^2-3x+4-(10x^2+17x+6)=7x^2-20x-2$$

$$\therefore a=7, b=-20, c=-2$$

$$\text{故 } a \times b \times c = 7 \times (-20) \times (-2) = 280, \text{ 選 D。}$$

(B)17.小昌想在數線上標示出 $|\sqrt{45}-9|$ 的點，則下列哪一個圖示是正確的?



<解析>

$$6^2=36 < 45 < 49=7^2 \rightarrow 6 < \sqrt{45} < 7$$

$$\text{且 } \sqrt{45} < 9 \therefore |\sqrt{45}-9| = 9-\sqrt{45}$$

$$6 < \sqrt{45} < 7, -6 > -\sqrt{45} > -7$$

$$3 > 9-\sqrt{45} > 2, 3 > |9-\sqrt{45}| > 2, \text{ 選 B。}$$

(A)18.若 $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ， $y=\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ，則 $\frac{2x^2+3xy+2y^2}{xy}$ 的值為何?

(A)-17 (B)-15 (C)-13 (D)-11

<解析>

$$x+y=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}, x \cdot y=(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3})=-1$$

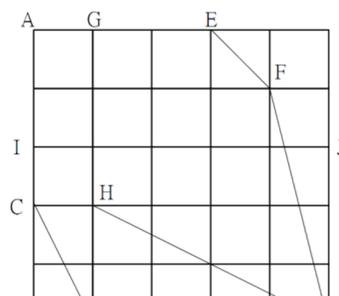
$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{2})^2+2=10$$

$$\text{原式}=\frac{2x^2+3xy+2y^2}{xy}=\frac{2(x^2+y^2)+3xy}{xy}=\frac{2 \times 10+(-3)}{-1}=-17, \text{ 選 A。}$$

(B)19.右圖為間隔均為1的棋盤式方格，甲走的路線為A→C→D→B，乙走的路線為A→G→H→B，丙走的路線為A→I→J→B，丁走的路線為A→E→F→B，則甲、乙、丙、丁四人誰走的距離最短?

(A)甲 (B)乙 (C)丙 (D)丁

<解析>



$$\text{甲} = 3 + \sqrt{5} + 4 = 7 + \sqrt{5} \approx 9.23$$

$$\text{乙} = 1 + 3 + 2\sqrt{5} = 4 + 2\sqrt{5} \approx 8.46$$

$$\text{丙} = 2 + 5 + 3 = 10$$

$$\text{丁} = 3 + \sqrt{2} + \sqrt{17} \approx 8.53$$

丙 > 甲 > 丁 > 乙，選 B。

(C) 20. 有三個不同的質數，已知它們的平方的總和是 5070，請問這三個質數最大是多少? (A)61 (B)67 (C)71 (D)73

<解析>

因為 5070 是偶數，故這三個質數中，必有一個偶數 2，否則三奇數的平方和必為奇數。

令這三個質數為 2、p、q 且 $p^2 + q^2 = 5070 - 2^2 = 5066$

觀察個位數，除了 5 以外的所有質數平方的個位數都是 1 或 9，故兩個奇質數的平方和之個位數為 6，只有一種可能，其中一個質數是 5，故令 $p=5$ ，且 $q^2 = 5066 - 5^2 = 5041$ ，則 $q=71$ ，這三數最大的是 71，選 C。

(A) 21. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020})(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2019}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020})(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2019}) = ?$
 (A) $\frac{1}{2020}$ (B) $-\frac{1}{2020}$ (C) $\frac{4039}{4080400}$ (D) $-\frac{1}{4080400}$

<解析>

設 $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2019}$ ，則原式 $= (M + \frac{1}{2020}) \times (1 + M) - (1 + M + \frac{1}{2020})M$
 $= M + M^2 + \frac{1}{2020} + \frac{M}{2020} - M - M^2 - \frac{M}{2020} = \frac{1}{2020}$ ，選 A。

(A) 22. Choose a number from 1 to 9, times (乘) the number by 3 and plus 3. After that we times the result by 3 again and gives you another number. What is the sum of the digit in tens place(十位數) and the digit in ones place(個位數)?
 (A)9 (B)12 (C)15 (D) unsure

<翻譯>

在 1~9 中選一個數字，把這個數字乘以 3，再加上 3 後，再乘以 3，得到一組數字，然後將十位數字和個位數字相加之和是多少? (A)9 (B)12 (C)15 (D)不確定

<解析>

令所選的數字為 $x \rightarrow (3x+3) \times 3 = 9x+9 \rightarrow 9$ 的倍數

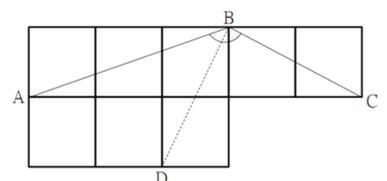
\therefore 十位數字+個位數字=9，選 A。

(B) 23. Right graph is made by 8 identical (相同的)squares, what is $\angle ABC$?
 (A)120° (B)135° (C)150° (D) 165°

<翻譯>

右圖是由 8 個相同的正方形所組成，求 $\angle ABC$ 的度數是多少?

(A)120° (B)135° (C)150° (D) 165°



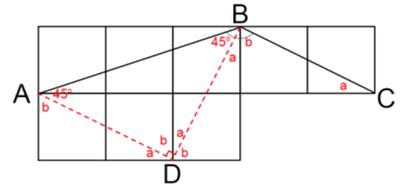
<解析>

① $\overline{AD}^2 = 2^2 + 1^2 = 5 = \overline{BD}^2$, $\overline{AB}^2 = 3^2 + 1^2 = 10$

$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 10 = \overline{AB}^2 \therefore \angle ADB = 90^\circ$

又 $\overline{AD} = \overline{BD} \therefore \angle DAB = \angle DBA = 45^\circ$

② $a+b=90^\circ \therefore \angle ABC = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$, 選 B。



(A)24. There are nine cards are labelled (拿走)from 1-9. Joe, Bill, and Cathy take three cards each.

Joe said: “The product of my cards is 48.”

Bill said: “The sum of my cards is 15.”

Cathy said “All my cards are odd numbers(奇數), the difference(差) between the largest number and the smallest number arranged by three cards in different order is 792.” Which is correct?

(A)Joe has the cards with 2,3,8 labelled. (B)Joe has the cards with 2,4,6 labelled.

(C)Bill has the cards with 3,5,7 labelled. (D)Bill has the cards with 3,4,8 labelled.

<翻譯>

寫有 1、2、3、4、5、6、7、8、9 的九張牌，Joe、Bill、Cathy 各拿 3 張牌:

Joe 說:「我的 3 張牌之積為 48」;

Bill 說:「我的 3 張牌之和是 15」;

Cathy 說:「我的 3 張牌都是奇數，排成最大三位數與最小三位數之差為 792」;

下列何者正確? (A) Joe 取走 2、3、8 (B) Joe 取走 2、4、6 (C) Bill 取走 3、5、7 (D) Bill 取走 3、4、8

<解析>

Joe $48=2 \times 3 \times 8=2 \times 4 \times 6$

Cathy 取走兩張牌相差 8，就是 1 和 9

奇數有 1、3、5、7、9 共 5 個，Bill 三張和 15，必有 1 張奇數，Cathy 有 3 張奇數

\therefore Joe 有 1 張奇數，即 Joe 是 2、3、8

Bill 是 4、5、6，Cathy 是 1、7、9，選 A。

(C)25. As the graph shown, there are right angle line segments (直角折線段)formed by three straight line inside a square, the length of three straight line is 5,6 and 9. Find the shaded area. (A)45 (B)50 (C)55 (D)60

<翻譯>

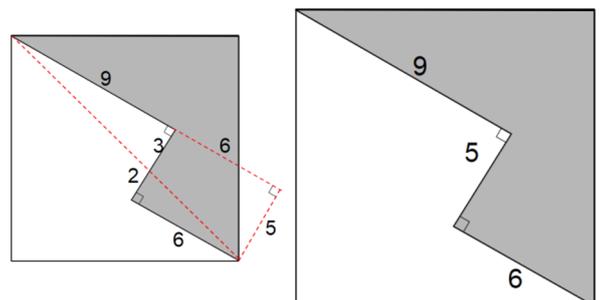
如圖，在一個正方形內畫出三條線段組成的直角折線段，其長度分別為 5、6 和 9。那麼陰影部分的面積為_____。(A)45 (B)50 (C)55 (D)60

<解析>

正方形面積為 $(15^2 + 5^2) \div 2 = 125$ ，把線段 5 分成 3 和 2 兩部分，所以陰影部分面積為

$125 \div 2 + 2 \times 6 \div 2 - 3 \times 9 \div 2 = 55$

選 C。



二、計算題(每題 25 分，共 50 分)

1.小芸做 6 組由邊長 5 公分的正方體所串成的吊飾來裝飾店面，正方體串法如右圖所示:從每個正方體的一個頂點 A 串到離 A 點最遠的頂點 B。串好 10 個正方體後，上下各留 25 公分打中國結，這就完成一組吊飾。請問小芸至少需準備繩子多少公尺? $(\sqrt{2}=1.414$ ， $\sqrt{3}=1.732$ ， $\sqrt{5}=2.236)$

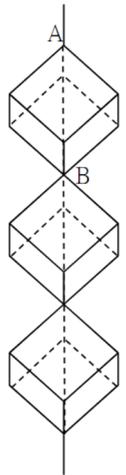
<解析>

$$\overline{AB} = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = 5\sqrt{3}$$

$$\text{一組吊飾的繩長} = 10 \times 5\sqrt{3} + 2 \times 25 = 50\sqrt{3} + 50$$

$$\text{故共需繩長} = 6(50\sqrt{3} + 50) = 300\sqrt{3} + 300 = 3 \times 1.732 + 300 = 819.6\text{cm} = 8.196\text{m}$$

答:需要繩子 8.196 公尺



2. 古時有個天才老外數學家，遺書上說:「如果妻子幫我生了兒子，兒子將繼承 $\frac{2}{3}$ 財產，妻子得到 $\frac{1}{3}$ ；如果生了女兒，女兒繼承 $\frac{1}{3}$ 財產，妻子得到 $\frac{2}{3}$ 」，結果數學家死後，妻子給他生下一對龍鳳胎(一男一女)，如果你是當時的法官，會如何分配此財產?

<解析>

$$\text{兒子:妻子} = 2:1 = 4:2$$

$$\text{妻子:女兒} = 2:1$$

$$\text{兒子:妻子:女兒} = 4:2:1$$

$$\therefore \text{兒子} = \frac{4}{7}, \text{妻子} = \frac{2}{7}, \text{女兒} = \frac{1}{7}$$