第 17 屆 IMC 國際數學競賽 台灣區初賽
17th International Mathematics Primary Contest (Taiwan)
高中二年級組

一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

(A)1. a、b 為有理數，若 $2x^3+ax^2+4x+b=0$ 的一根為 $\sqrt{2}-1$，求數對(a, b)=?
(A) (7, -3) (B) (-7, 3) (C) (0, -2) (D)(-6, 2)

<解析>

$x=\sqrt{2}-1$，$(x+1)^2=2$，$x^2+2x-1=0$

$2x^3+ax^2+4x+b=(x^2+2x-1)(2x+k)$

$4=-2+2k$，$k=3$

$2x^3+ax^2+4x+b=(x^2+2x-1)(2x+3)$

$\therefore b=-3$，$a=4+3=7$，選 A。

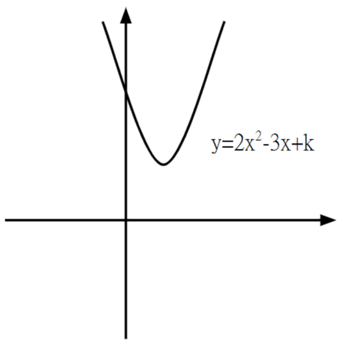
(A)2.設 k 為實數，對所有實數 x 恆使得 $-2x^2+3x-k\le 0$，求 k 的範圍為?
(A) $k\ge\frac{9}{8}$ (B) $k\le\frac{9}{8}$ (C) $k\ge\frac{9}{4}$ (D) $k\le\frac{9}{4}$

<解析>

$2x^2-3x+k\ge 0$ 恆真

$\rightarrow D=(-3)^2-4\times 2\times k\le 0$

故 $k\ge\frac{9}{8}$，選 A。



(B)3.沐屏將 10000 元存入銀行，年利率為 2%，每半年複利計息一次，則 10 年後，共可領回本利和多少元？($1.01^{10}=1.1046$，$1.01^{20}=1.2202$，$1.02^{10}=1.2190$，$1.02^{20}=1.4859$) (A)11046 (B)12202 (C)12190 (D)14859 元

<解析>

本利和=$10000\times(1+\frac{0.02}{2})^{20}=10000\times(1.01)^{20}=10000\times 1.2202=12202$，選 B。

(B)4.化簡 $\frac{1}{1-\sqrt[4]{3}}+\frac{1}{1+\sqrt[4]{3}}+\frac{2}{1+\sqrt{3}}$=? (A)2 (B)-2 (C)$\sqrt{2}$ (D)$-\sqrt{2}$

<解析>

$\frac{(1+\sqrt[4]{3}+1-\sqrt[4]{3})}{(1-\sqrt[4]{3})(1+\sqrt[4]{3})}+\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\frac{2}{1-\sqrt{3}}+\frac{2}{1+\sqrt{3}}=-2$，選 B。

(B)5.設 $<a_n>$ 是由正數所組成的等比數列，且 $a_5\times a_6=9$，則:

$\log_3 a_1+\log_3 a_2+\log_3 a_3+\ldots\ldots+\log_3 a_{10}=?$ (A)8 (B)10 (C)12 (D)$\log_3 15$

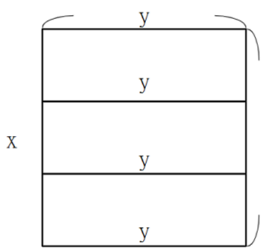
<解析>

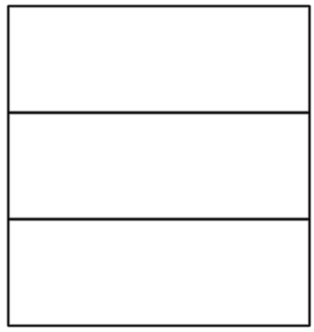
原式=$\log_3(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\ldots\cdot a_{10})=\log_3[(a_1\cdot a_{10})\times(a_2\cdot a_9)\times(a_3\cdot a_8)\times(a_4\cdot a_7)\times(a_5\cdot a_6)]$

$=\log_3(a_5a_6)^5=\log_3 9^5=10$，選 B。

(A)6.叔叔用鐵絲圍成面積 8 平方公尺的「目」字形區域，如圖所示，則他至少要準備多少公尺的鐵絲。(鐵絲厚度不計) (A)16 (B)18 (C)20 (D)22 公尺

<解析>





如圖，假設長為 x 公尺，寬 y 公尺

$\rightarrow xy=8$

故鐵絲全長=2x+4y

算幾不等式: $\frac{2x+4y}{2}\geq\sqrt{2x\cdot 4y}$

$\rightarrow 2x+4y\geq 16$，至少準備 16 公尺的鐵絲

選 A。

(D)7.直線 L 與 3x-4y=5 垂直，且在第一象限內與兩坐標所圍成三角形面積為 6，則直線 L 方程式為何? (A)3x+4y=6 (B)4x+3y=6 (C)3x+4y=12 (D)4x+3y=12

<解析>

令 L: $4x+3y=k$ ($k>0$)→與兩坐軸交於($\frac{k}{4}$，0)、(0，$\frac{k}{3}$)

$\because \frac{1}{2}\cdot\frac{k}{4}\cdot\frac{k}{3}=6\rightarrow k=\pm 12$ (負不合)

∴直線方程式為 4x+3y=12，選 D。

(B)8.x、y 滿足 L:3x+4y=1，則$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$之最小值為? (A)1 (B)2 (C)3 (D)$\sqrt{5}$

<解析>

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$ 表 P(x, y)到(1, 2)之距離，但 P 在 L:3x+4y=1 上

故最小值=$\left|\frac{3\cdot 1+4\cdot 2-1}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\frac{10}{5}=2$，選 B。

(B)9.設 k 是實數，已知直線 L: $3x+y-k+2=0$ 與圓 C: $x^2+y^2-2x+6y=0$ 相交，則 k 值的範圍為何? (A)$-8<\mathrm{k}<12$ (B)$-8\leq\mathrm{k}\leq 12$ (C)$-6<\mathrm{k}<10$ (D)$-6\leq\mathrm{k}\leq 10$

<解析>

圓 C: $(x-1)^2+(y+3)^2=10$

圓心(1, -3)，半徑=$\sqrt{10}$

∵兩圖形相交 ∴圓心到 L 的距離≦半徑

$\rightarrow \dfrac{|3-3-k+2|}{\sqrt{3^2+1^2}} \le \sqrt{10}$ ， $|-k+2| \le 10$

$\rightarrow -10 \le -k+2 \le 10$ ， $-8 \le k \le 12$ ，選 B。

(D)10.若二次函數 $f(x)=a(x-h)^2+5$ 滿足 $f(3-t)=f(3+t)$ ， $t \in R$ ，則下列何者正確?
(A) $f(0)>0$ (B) $f(0)\ge 0$ (C) $f(-1)>f(7)$ (D) $f(-1)\le f(7)$

<解析>

∵ $f(3-t)=f(3+t)$ ∴對稱軸為 $x=3 \rightarrow h=3$

條件無法得知開口方向

∴a 可正可負

令 $t=4$ 代入， $f(-1)=f(7)$ ，選 D。

(B)11.將五件不同的獎品，分給甲、乙、丙、丁四人，獎品必須全部分完，則當乙、丙均至少得一件時，有幾種分法? (A)560 (B)570 (C)580 (D)590 種

<解析>

乙沒有得到或丙沒有得到的方法數= $3^5+3^5-2^5=454$

乙、丙均至少得一件的方法數= $4^5-454=570$ ，選 B。

(D)12.從男生 6 人，女生 5 人選出 5 人組成委員會，規定男女生至少各 2 人，則有幾種選法? (A)320 (B)330 (C)340 (D)350 種

<解析>

①「3 男 2 女」的選法有: $C^6_3 \times C^5_2 = 20 \times 10 = 200$ 種

②「2 男 3 女」的選法有: $C^6_2 \times C^5_3 = 15 \times 10 = 150$ 種

故 200+150=350 種，選 D。

(A)13.袋中有 4 白球、5 黑球，甲、乙 2 人依甲乙甲乙甲乙……之順序，自袋中取出 1 球，取後放回，規定先取得白球者為勝，求甲勝之機率為何?
(A) $\frac{9}{14}$ (B) $\frac{5}{14}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{4}{9}$

<解析>

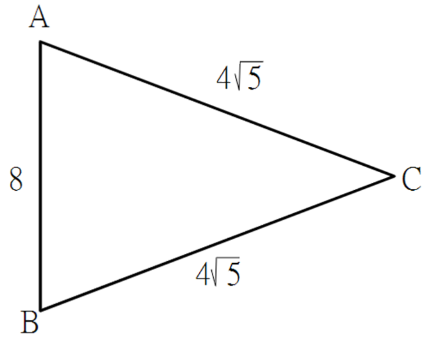
取第一回: 甲白 $\rightarrow \frac{4}{9}$ ；甲黑乙白 $\rightarrow \frac{5}{9}\times\frac{4}{9}$

∴甲勝:乙勝= $\frac{4}{9}:\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}=9:5$

∴甲勝之機率= $\frac{9}{9+5}=\frac{9}{14}$ ，選 A。

(B)14.三角形 ABC 的$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=4\sqrt{5}$ 及$\cos\angle BAC=\frac{1}{\sqrt{5}}$，則$\sin\angle ACB=$?

(A)$\frac{3}{5}$ (B)$\frac{4}{5}$ (C)$\frac{12}{13}$ (D)$\frac{5}{13}$



<解析>

$\overline{BC}^2=8^2+(4\sqrt{5})^2-2\times8\times4\sqrt{5}\cos A=64+80-64\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=80$

$\therefore\overline{BC}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

$\cos C=\frac{(4\sqrt{5})^2+(4\sqrt{5})^2-8^2}{2\times4\sqrt{5}\times4\sqrt{5}}=\frac{3}{5}$

$\therefore\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$

選 B。

(D)15.以$x-\sin10°$除$f(x)=-8x^3+x^2+6x+\sin^2 80°$的餘式為?

(A)$\frac{1}{2}$ (B)1 (C)$\frac{3}{2}$ (D)2

<解析>

$f(\sin10°)=-8\sin^3 10°+\sin^2 10°+6\sin10°+\sin^2 80°$

$=2(3\sin10°-4\sin^3 10°)+(\sin^2 10°+\cos^2 10°)=2\sin30°+1=2$，選 D。

(B)16.設函數$f(x)=4\cdot5^x+5^{2-x}$，則$f(x)$的最小值為? (A)10 (B)20 (C)30 (D)40

<解析>

$f(x)=4\cdot5^x+5^{2-x}=4\cdot5^x+25\cdot5^{-x}$

由算幾不等式知:

$\frac{4\cdot5^x+25\cdot5^{-x}}{2}\geq\sqrt{4\cdot5^x\cdot25\cdot5^{-x}}=\sqrt{100}=10$

$\therefore f(x)\geq20$

(B)17.設實數 x 滿足 0<x<1，且$\log_x 4-\log_2 x=1$，則 x=? (A)$\frac{1}{2}$ (B)$\frac{1}{4}$ (C)$\frac{1}{8}$ (D)$\frac{1}{16}$

<解析>

$\because\log_x 4-\log_2 x=1\rightarrow\log_x 2^2-\log_2 x=1$，$2\log_x 2-\log_2 x=1$

令$\log_2 x=t$，$\log_x 2=\frac{1}{t}$

$\therefore\frac{2}{t}-t-1=0\rightarrow(t+2)(t-1)=0$，$t=1$或$t=-2$

① $\log_2 x=-2$，$x=2^{-2}=\frac{1}{4}$ ② $\log_2 x=1$，$x=2$(且 0<x<1)

$\therefore x=\frac{1}{4}$，選 B。

(C)18.設 $\log_3 5 = a$ ， $\log_5 7 = b$ ，試以 a、b 表示 $\log_{147} 63 = ?$

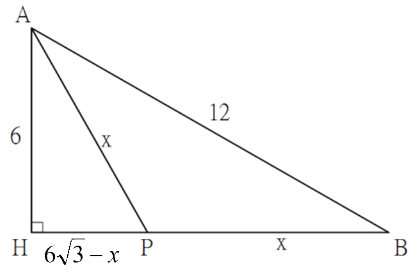
(A) $\dfrac{1+2ab}{ab}$ (B) $\dfrac{2+ab}{ab}$ (C) $\dfrac{2+ab}{1+2ab}$ (D) $\dfrac{1+2ab}{2+ab}$

<解析>

$\log_3 7 = (\log_3 5)(\log_5 7) = ab$

$$\log_{147} 63 = \frac{\log_3 63}{\log_3 147} = \frac{\log_3 3^2 + \log_3 7}{\log_3 3 + \log_3 7^2} = \frac{2\log_3 3 + \log_3 7}{\log_3 3 + 2\log_3 7} = \frac{2+ab}{1+2ab}$$ ，選 C。

(D)19.小鎮 A 距離一筆直道路 6 公里，並與道路上的小鎮 B 相距 12 公里，今欲在此道路上蓋一家超級市場使與 A、B 等距，則此超級市場與 A 的距離需為多少公里? (A) $\dfrac{5}{4}$ (B) $\dfrac{120}{13}$ (C) 10 (D) $4\sqrt{3}$



<解析>

設超商蓋在 P 點

$\overline{AP} = \overline{PB} = x$

$\overline{HB} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3} \rightarrow \overline{HP} = 6\sqrt{3} - x$

則 $x^2 = 6^2 + (6\sqrt{3} - x)^2$ ， $x = 4\sqrt{3}$

選 D。

(D)20. $f(x) = x^7 - 1$, $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{x^2}{1+x^4} + \dfrac{x^3}{1+x^6}$ ， $f(a) = 0$ and a $\neq 1$. Find $g(a)$.

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) 2 (C) $-\dfrac{3}{2}$ (D) -2

$f(x) = x^7 - 1$ ， $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{x^2}{1+x^4} + \dfrac{x^3}{1+x^6}$ ， $f(a) = 0$ 且 $a \neq 1$ ，求 $g(a) = ?$

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) 2 (C) $-\dfrac{3}{2}$ (D) -2

<解析>

$f(a) = a^7 - 1 = 0 \rightarrow a^7 = 1$ ， $a^8 = a$ ， $a^9 = a^2$ ………

$a^7 - 1 = 0 \rightarrow (a-1)(a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) = 0$

$\therefore a = 1$ 或 $a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = 0$

且 $a \neq 1$ ， $1 + a^4 + a^2 + a^6 = -a^5 - a^3 - a$

$$g(a) = \frac{a}{1+a^2} + \frac{a^2}{1+a^4} + \frac{a^3}{1+a^6} = \frac{a(1+a^4) + a^2(1+a^2)}{(1+a^2)(1+a^4)} + \frac{a^3}{1+a^6} = \frac{a + a^5 + a^2 + a^4}{1 + a^2 + a^4 + a^6} + \frac{a^3}{1+a^6}$$

$$= \frac{-1 - a^3 - a^6}{-a^5 - a^3 - a} + \frac{a^3}{1+a^6} = \frac{a^6 + a^3 + 1}{a^5 + a^3 + a} + \frac{a^3}{1+a^6} = \frac{(a^6 + a^3 + 1)(1 + a^6) + a^3(a^5 + a^3 + a)}{(a^5 + a^3 + a)(1 + a^6)}$$

$$= \frac{a^6 + a^3 + 1 + a^{12} + a^9 + a^6 + a^8 + a^6 + a^4}{a^{11} + a^5 + a^3 + a^9 + a + a^7} = \frac{a^5 + a^2 + a^3 + a^9 + a^4 + a^3 + 1 + 2a^6}{a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1} = \frac{2a^6}{-a^6} = -2$$

選 D。

(B)21. Let $b=\dfrac{10^{20000}}{10^{100}+3}$, what is the units place of the whole number part of b?

(A)1 (B)3 (C)7 (D)9

令 $b=\dfrac{10^{20000}}{10^{100}+3}$ ，求 b 之整數部分的個位數字=? (A)1 (B)3 (C)7 (D)9

<解析>

$$b=\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}=\frac{(10^{100})^{200}-3^{200}}{10^{100}+3}+\frac{3^{200}}{10^{100}+3}=\frac{(10^{100})^{200}-3^{200}}{10^{100}+3}+\frac{9^{100}}{10^{100}+3}$$

小數部分: $0<\dfrac{9^{100}}{10^{100}+3}<1$ ，整數部分: $\dfrac{(10^{100})^{200}-3^{200}}{10^{100}+3}$

令 $10^{100}=t$

b 的整數部分= $\dfrac{(t)^{200}-3^{200}}{t+3}=\dfrac{(t^2)^{100}-9^{100}}{t+3}=\dfrac{(t^2-9)[(t^2)^{99}+(t^2)^{98}\cdot 9+.......+t^2\cdot 9^{98}+9^{99}]}{t+3}$

$=(t-3)[(t^2)^{99}+(t^2)^{98}\cdot 9+.......+t^2\cdot 9^{98}+9^{99}]=(100.....0-3)[\Delta\Delta.....00+9^{99}]=(........7)(.........9)=.......3$

個位數字=3，選 B。

(A)22. Choose a number from 1 to 9, times (乘)the number by 3 and plus 3. After that we times the result by 3 again and gives you another number. What is the sum of the digit in tens place(十位數) and the digit in ones place(個位數)?

(A)9 (B)12 (C)15 (D) unsure

<翻譯>

在 1~9 中選一個數字，把這個數字乘以 3，再加上 3 後，再乘以 3，得到一組數字，然後將十位數字和個位數字相加之和是多少? (A)9 (B)12 (C)15 (D)不確定

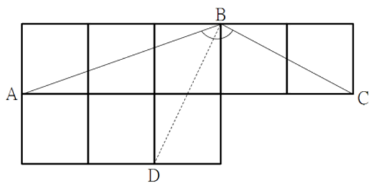
<解析>

令所選的數字為 x➔(3x+3)×3=9x+9→9 的倍數

∴十位數字+個位數字=9，選 A。

(B)23. Right graph is made by 8 identical (相同的)squares, what is $\angle ABC$?

(A)120° (B)135° (C)150° (D) 165°

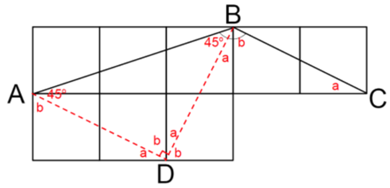


<翻譯>

右圖是由 8 個相同的正方形所組成，求∠ABC 的度數是多少?

(A)120° (B)135° (C)150° (D) 165°

<解析>



① $\overline{AD}^2=2^2+1^2=5=\overline{BD}^2$ ， $\overline{AB}^2=3^2+1^2=10$

$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=10=\overline{AB}^2$ ∴ $\angle ADB=90°$

又 $\overline{AD}=\overline{BD}$ ∴ $\angle DAB=\angle DBA=45°$

②a+b=90° ∴ $\angle ABC=90°+45°=135°$ ，選 B。

(A)24. There are nine cards are labelled (拿走)from 1-9. Joe, Bill, and Cathy take three cards each.

Joe said: “The product of my cards is 48.”

Bill said: “The sum of my cards is 15.”

Cathy said “All my cards are odd numbers(奇數), the difference(差) between the largest number and the smallest number arranged by three cards in different order is 792.” Which is correct?

(A)Joe has the cards with 2,3,8 labelled. (B)Joe has the cards with 2,4,6 labelled.
(C)Bill has the cards with 3,5,7 labelled. (D)Bill has the cards with 3,4,8 labelled.

<翻譯>

寫有 1、2、3、4、5、6、7、8、9 的九張牌，Joe、Bill、Cathy 各拿 3 張牌:
Joe 說:「我的 3 張牌之積為 48」;
Bill 說:「我的 3 張牌之和是 15」;
Cathy 說:「我的 3 張牌都是奇數，排成最大三位數與最小三位數之差為 792」;
下列何者正確? (A) Joe 取走 2、3、8 (B) Joe 取走 2、4、6(C) Bill 取走 3、5、7(D) Bill 取走 3、4、8

<解析>

Joe 48=2×3×8=2×4×6
Cathy 取走兩張牌相差 8，就是 1 和 9
奇數有 1、3、5、7、9 共 5 個，Bill 三張和 15，必有 1 張奇數，Cathy 有 3 張奇數
∴Joe 有 1 張奇數，即 Joe 是 2、3、8
Bill 是 4、5、6 ，Cathy 是 1、7、9，選 A。

(C)25. As the graph shown, there are right angle line segments (直角折線段)formed by three straight line inside a square, the length of three straight line is 5,6 and 9. Find the shaded area. (A)45 (B)50 (C)55 (D)60

<翻譯>

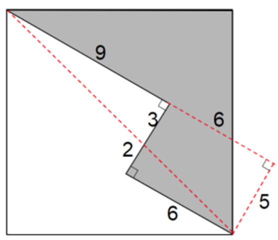
如圖，在一個正方形內畫出三條線段組成的直角折線段，其長度分別為 5、6 和 9。那麼陰影部分的面積為_____。 (A)45 (B)50 (C)55 (D)60

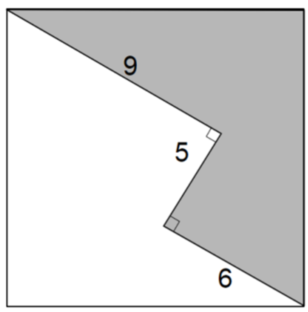
<解析>

正方形面積為 $(15^2+5^2)\div 2=125$ ，把線段 5 分成 3 和 2 兩部分，所以陰影部分面積為

$125\div 2+2\times 6\div 2-3\times 9\div 2=55$

選 C。





二、計算題(每題 25 分，共 50 分)

1. 古時有個天才老外數學家，遺書上說:「如果妻子幫我生了兒子，兒子將繼承 $\frac{2}{3}$ 財產，妻子得到 $\frac{1}{3}$；如果生了女兒，女兒繼承 $\frac{1}{3}$ 財產，妻子得到 $\frac{2}{3}$ 」，結果數學家死後，妻子給他生下一對龍鳳胎(一男一女)，如果你是當時的法官，會如何分配此財產?

<解析>

兒子:妻子=2:1=4:2
妻子:女兒=2:1

兒子:妻子:女兒=4:2:1

$\therefore$兒子=$\frac{4}{7}$，妻子=$\frac{2}{7}$，女兒=$\frac{1}{7}$

2. 2.設 a, b, c, d 是實數，若$a^2+b^2+c^2+d^2+1\le a+b+c+d$，試證$a=b=c=d$

<解析>

$a^2+b^2+c^2+d^2+1\le a+b+c+d$

$\rightarrow (a^2-a+\frac{1}{4})+(b^2-b+\frac{1}{4})+(c^2-c+\frac{1}{4})+(d^2-d+\frac{1}{4})\le 0$

$\therefore (a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2+(c-\frac{1}{2})^2+(d-\frac{1}{2})^2\le 0$ 且 a, b, c, d 是實數

$\therefore (a-\frac{1}{2})^2\ge 0$，$(b-\frac{1}{2})^2\ge 0$，$(c-\frac{1}{2})^2\ge 0$，$(d-\frac{1}{2})^2\ge 0$

$\therefore a-\frac{1}{2}=0$，$b-\frac{1}{2}=0$，$c-\frac{1}{2}=0$，$d-\frac{1}{2}=0$

則$a=b=c=d=\frac{1}{2}$，此題得證