2020 第十六屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)

2020 Sixteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

國中三年級試卷

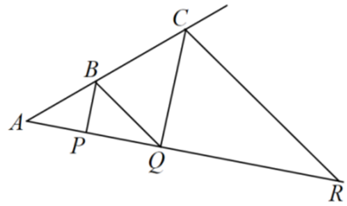
考試時間：90 分鐘　　卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

2020 第十六屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)
2020 Sixteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)



(C)1. 如圖，$\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$，$\overline{BP}//\overline{CQ}$，$\overline{BQ}//\overline{CR}$，若△ABP 面積為 a，則四邊形 BPRC 面積為何?
(A) $20a$ (B) $24a$ (C) $26a$ (D) $28a$

<解析>

$\because \overline{BP}//\overline{CQ}$ 且 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$

$\therefore \overline{AP}:\overline{PQ}=1:2$

又 $\overline{BQ}//\overline{CR}$，$\overline{AQ}:\overline{QR}=1:2$

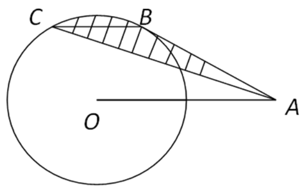
$\therefore \overline{AP}:\overline{PQ}:\overline{QR}=1:2:6$

∵△ABP= a，△BPQ= $2a$ 且△BPQ~△CQR

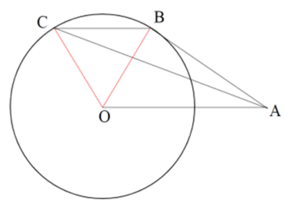
∴△BPQ：△CQR 面積比=1:9➔△CQR= $18a$

又∵△ABQ：△BQC 面積比=1:2➔△BQC= $6a$

四邊形 BPRC 面積= $2a+6a+18a=26a$，選 C。



(B)2. As show in the figure, A is a point outside of circle O with radius is 1, $\overline{OA}=2$, $\overline{AB}$ tangent to circle O at point B, and $\overline{BC}//\overline{OA}$, connect $\overline{AC}$. What is the area of shaded part? (A) $\frac{3\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{2\pi}{5}$ (D) $\frac{4\pi}{7}$



<解析>

連接 $\overline{OB}$、$\overline{OC}$

故 $\Delta COB=\Delta CAB$(等底等高)

∵ $\overline{AB}$ 是切線且 $\overline{AO}$=2，$\overline{BO}$=1➔ $\angle BAO=60^\circ=\angle CBO$(內錯角相等)

∴△CBO是正三角形➔所求=1×1× $\pi\times\frac{60^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi}{6}$

(B)3.已知關於 x 的一元二次方程 $x^2-(m+3)x+m+2=0$ 有兩個正整數根，則 m 的最小值為____________. (A)0 (B)-1 (C) $-\frac{3}{2}$ (D) -2

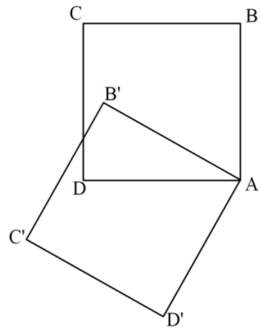
<解析>

D= $(m+3)^2-4(m+2)\geq 0$ ➔ $m^2+6m+9-4m-8\geq 0$ ， $m^2+2m+1\geq 0$

$(m+1)^2\geq 0$ ➔ $m\geq -1$

(B)4.如圖，將邊長為 1 的正方形 ABCD 繞 A 點按逆時針方向旋轉 $60°$ 至 AB'C'D' 的位置，則這兩個正方形重疊部分的面積是 ____________.

(A)4- $2\sqrt{3}$ (B) 2- $\sqrt{3}$ (C) 6-3 $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3}$ -1



<解析>

兩個正方形重疊部分是一個軸對稱圖形，可看成兩個全等的直角三角形，一個銳角是 15°

$S=\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$.

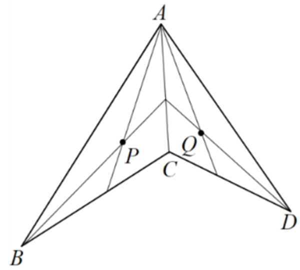
(C)5. 已知 $a=\frac{1}{19}x+2020, b=\frac{1}{19}x+2019, c=\frac{1}{19}x+2021$ ，則 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=$ ____________. (A)2 (B)0 (C)3 (D)6

<解析>

原式 $=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right]=\frac{1}{2}[1+1+4]=3$

(D)6.如圖，凹四邊形 ABCD，若 P 、Q 分別為△ABC、△ACD 的內心，且 $\angle BCD=140°$ ，則 $\angle APB+\angle AQD=?$

(A) $220°$ (B) $240°$ (C) $260°$ (D) $290°$



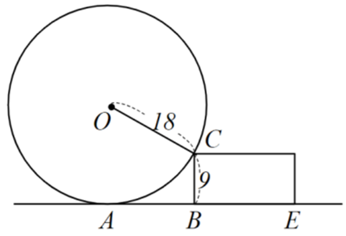
<解析>

$$\angle APB+\angle AQD=90°+\frac{1}{2}\angle ACB+90°+\frac{1}{2}\angle ACD$$

$$=180°+\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ACD)=180°+\frac{1}{2}(360-140)=290°$$

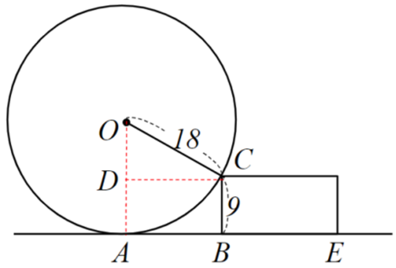
選 D。

(D)7.如圖，千卉老師拿一顆半徑 18 公分的球靠在高 9 公分的盒子旁邊，若 A 點在圓心 O 的正下方，則扇形 AOC 的面積為多少平方公分?
(A) 25π (B) 27π (C) 36π (D) 54π



<解析>

畫輔助線 $\overline{OA}$ 、 $\overline{CD}$

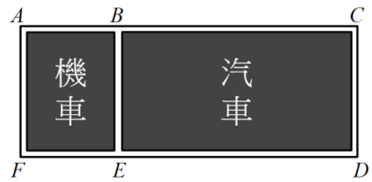


Rt△ ODC 中， $\overline{OD}=18-9=9=\dfrac{1}{2}\overline{OC}$

$\therefore \angle OCD=30^\circ$ ， $\angle COD=60^\circ$

扇形 AOC 的面積= $18\times18\times\pi\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}=54\pi$ ，選 D。

(B)8. 學校利用一塊空地規劃出面積比為 $3:1$ 的矩形汽、機車停車場，如圖，已知圖中所有白色線段的長度總和為 100 公尺，若兩矩形面積的總和最大，則此時 $\overline{AB}$ 的長度為何?(A) $\dfrac{25}{2}$ (B) $\dfrac{25}{4}$ (C) $\dfrac{25}{6}$ (D) $\dfrac{25}{8}$



<解析>

$\because$ 矩形 BCDE 面積：矩形 ABEF 面積=3:1

$\therefore \overline{BC}:\overline{AB}=3:1$

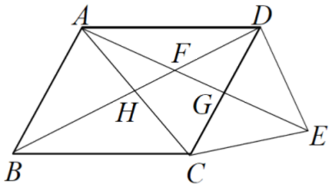
設 $\overline{AB}=\overline{EF}=x$ 公尺， $\overline{BC}=\overline{DE}=3x$ 公尺

則 $\overline{AF}=\overline{BE}=\overline{CD}=\dfrac{100-8x}{3}$ 公尺

矩形 $ACDF$ 面積= $4x\cdot\dfrac{100-8x}{3}=\dfrac{-32x^2+400x}{3}=-\dfrac{32}{3}x^2+\dfrac{400}{3}x$

$x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{\frac{400}{3}}{2\cdot(-\frac{32}{3})}=\dfrac{400}{3}\div\dfrac{96}{3}=\dfrac{25}{4}$ ，選 B。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)



1. 如圖，四邊形 ABCD 為平行四邊形，四邊形 ACED 是鳶形。若 $\overline{AD}=13$，$\overline{CD}=10$，則 $\overline{BD}=$______。

<解析>

$\overline{AE}$ 垂直平分 $\overline{CD}$，$\overline{GD}=10\div 2=5$

$\therefore \overline{AG}=\sqrt{13^2-5^2}=12$，又 F 是△ACD 的重心

$\therefore \overline{FG}=12\times\frac{1}{3}=4$，$\overline{FD}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$

$\Rightarrow \overline{HD}=\frac{3}{2}\sqrt{41}$，$\overline{BD}=2\times\frac{3}{2}\sqrt{41}=3\sqrt{41}$

2. 在平面直角坐標系 xOy 中，P 是直線 $y=2$ 的一個動點，圓 P 的半徑是 1，直線 OQ 切圓 P 於點 Q，則線段 OQ 的最小值為________ .

<解析>

△OPQ 是直角三角形，所以 OQ 最小，只需要 OP 最小，即 $P(0,2)$，$OQ=\sqrt{3}$.

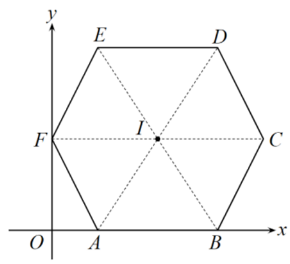
3. 隨機取一個由 0 和 1 構成首位不為 0 的八位數，它的偶數位元數字之和與奇數位元數字之和相等的機率為_____________.

<解析>

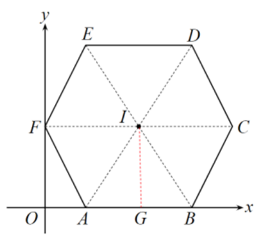
首位不是 0，只能是 1. 奇數位元數位和與偶數位元數位和相等，則 1 的個數成對出現.

所求概率為 $\frac{C_1^4+C_1^3C_2^4+C_2^3C_3^4+1}{2^7}=\frac{35}{128}$.

4. 如圖，正六邊形 ABCDEF 中，頂點 A、B 在 x 軸上，F 在 y 軸上，且 A 點的坐標為(1, 0)。若 I 點為正六邊形 ABCDEF 的內心，且其坐標為(a, b)，則 a^2+b^2 之值為______。



<解析>



$\because \angle OAF=180°-120°=60°$

且 $\angle FOA=90°$，$\overline{OA}=1$

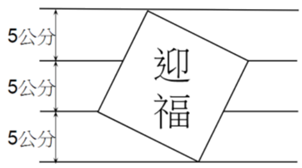
$\therefore \overline{OF}=\sqrt{3}\cdot\overline{OA}=\sqrt{3}$，$\overline{AF}=2\cdot\overline{OA}=2$

設 $\overline{IG}\perp\overline{AB}$ 於 G，則 $b=\overline{IG}=\overline{OF}=\sqrt{3}$

而 $a=\overline{IF}=\overline{AF}=2$

$\therefore a^2+b^2=2^2+(\sqrt{3})^2=7$

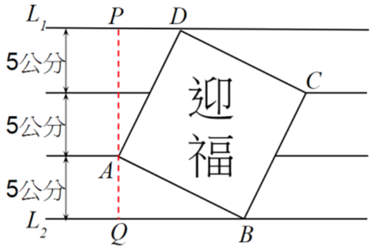
5.有一張正方形春聯貼在鐵窗上，如圖所示，若鐵窗上的每一根鐵條都互相平行，且鐵條間的距離皆為 5 公分，則春聯的面積為______平方公分。



<解析>

過 A 點作 L_1 的垂直線，分別交 L_1、L_2 於 P 、Q 兩點

在△ADP 與△BAQ 中



① $\angle AQB = \angle APD = 90°$

② $\overline{AD} = \overline{AB}$

③ $\angle QAB = \angle PDA$

$\therefore \Delta ADP \cong \Delta BAQ$ (AAS 全等)

在直角△BAQ 中，$\overline{BQ} = \overline{AP} = 10$ 且 $\overline{AQ} = 5$

∴正方形 ABCD 的面積= $\overline{AB}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{BQ}^2 = 5^2 + 10^2 = 125$

6. 某七星級帆船旅館內有 56 層樓(1 樓至 56 樓)，一樓大廳有三座電梯，第一座電梯只停 2 的倍數的樓層，第二座電梯只停 3 的倍數的樓層，第三座電梯直達前兩座電梯沒有到達的樓層，若小葳搭乘第三座電梯到達所下榻的房間樓層，則小葳的房間樓層有______種選擇。

<解析>

$56 \div 2 = 28$ ➔2 的倍數有 28 個

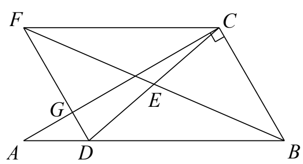
$56 \div 3 = 18....2$ ➔3 的倍數有 18 個

$56 \div 6 = 9....2$ ➔6 的倍數有 9 個

∴2 或 3 的倍數有 28+18-9=37 個

故 55-37=18(考慮樓層為 2 樓~56 樓)

7. In △ ABC as show in the right, $\angle ACB = 90°$, D is a point on $\overline{AB}$, connect $\overline{CD}$, E is the midpoint of $\overline{CD}$, connect $\overline{BE}$ and extend $\overline{BE}$ to point F, $\overline{EF} = \overline{BE}$, connect $\overline{DF}$ and $\overline{DF}$ intersect $\overline{AC}$ at point G, then connect $\overline{CF}$. If $\angle A = 30°$, $BC = 4$, $CF = 6$, then $\overline{CD}$=__________.



<解析>

$\overline{AB} = 8$ ，$\overline{AD} = 2$ ，$\overline{AG} = \sqrt{3}$ ，$\overline{CG} = 3\sqrt{3}$

∴在 RT△CGD 中，$\overline{CD} = 2\sqrt{7}$

8. Use five sticks of 4cm, 5cm, 6cm, 7cm and 8cm to form a triangle, where any side can be connected with two or more sticks but no stick should be broken into two smaller sticks. What is the largest possible area of triangle can be formed? ________.

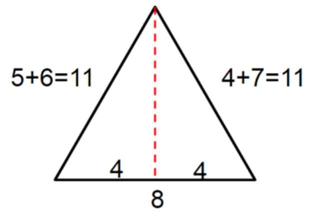
<解析>

5+6+7+8+9=30，30÷3=10(周長固定下，越接近正三角形面積是最大的)

故三邊長=(4+7，5+6，8)

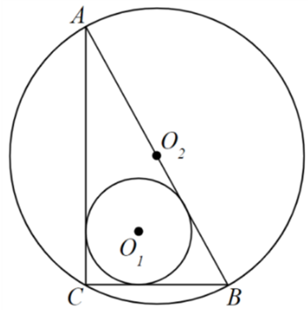
三角形的高=$\sqrt{11^2-4^2}=\sqrt{121-16}=\sqrt{105}$

故面積=$8\times\sqrt{105}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{105}$

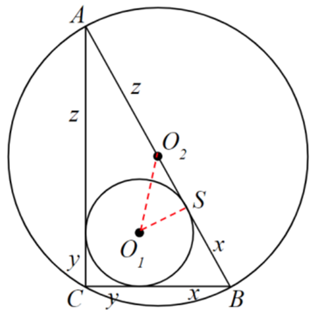


三、計算題(10 分/10 分，共 20 分) ※未寫計算過程不予計分

1. 如圖，直角△ABC 中，$\angle C=90°$，且圓 O_1 為△ABC 的內切圓，圓 O_2 為△ABC 的外接圓，若 $\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=6$，則 $\overline{O_1O_2}=$？



<解析>



① $\overline{O_1S}=\dfrac{6+8-10}{2}=2$

② $\overline{O_2B}=10\div 2=5$

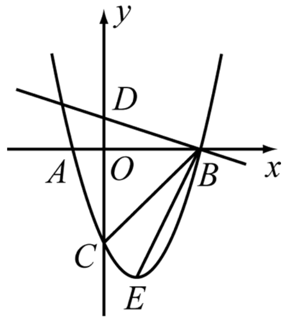
$$\begin{cases}x+y=6\\x+z=10\\z+y=8\end{cases}$$

➔ $2(x+y+z)=24$，$x+y+z=12$

➔ $x=12-8=4=\overline{BS}$

$\therefore \overline{O_2S}=\overline{O_2B}-\overline{BS}=5-4=1$，故 $\overline{O_1O_2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

2. 如圖，拋物線$y=ax^2+bx-3$，頂點為 E，該拋物線與x軸交於 A，B 兩點，與y軸交於點 C，且$\overline{OB}=\overline{OC}=3\overline{OA}$．直線$y=-\frac{1}{3}x+1$與$y$軸交於點 D．求$\angle DBC-\angle CBE$．



〈解析〉

$C(0,-3), B(3,0), A(-1,0),$

所以拋物線為$y=x^2-2x-3$，其頂點$E(1,-4)$.

又$D(0,1)$.

在△BCE 中， $BC=3\sqrt{2}, CE=\sqrt{2}, BE=2\sqrt{5}$

所以$\angle BCE=90°$， $\tan\angle CBE=\frac{1}{3}=\tan\angle DBO$.

所以$\angle CBE=\angle DBO$，所以$\angle DBC-\angle CBE=\angle OBC=45°$.