

2020 第十六屆  國際數學競賽複賽(台灣)  
2020 Sixteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

國  
中  
二  
年  
級  
試  
卷

考試時間：90 分鐘 卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

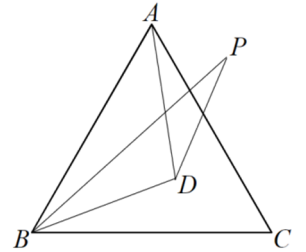
# 2020 第十六屆 國際數學競賽複賽(台灣)

2020 Sixteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

- ( D )1. D is a interior point of equilateral triangle ABC, and  $\overline{DB} = \overline{DA}$ , P is a point outside this triangle, and  $\overline{BP} = \overline{BA}$ ,  $\angle DBP = \angle DBC$ , then  $\angle BPD = ?$   
 (A)  $15^\circ$  (B)  $20^\circ$  (C)  $25^\circ$  (D)  $30^\circ$



<解析>

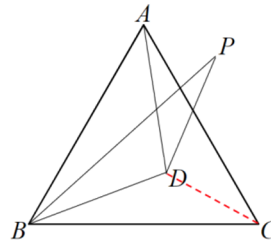
連接  $\overline{CD}$ ， $\triangle ADC$  和  $\triangle BDC$

①  $\overline{AD} = \overline{BD}$  ②  $\overline{CD} = \overline{CD}$  ③  $\overline{AC} = \overline{BC}$   
 $\triangle ADC \cong \triangle BDC$  (SSS)  $\rightarrow \angle ACD = \angle BCD = 30^\circ$

$\triangle BDP$  和  $\triangle BDC$

①  $\overline{BD} = \overline{BD}$  ②  $\angle PBD = \angle CBD$  ③  $\overline{BP} = \overline{BC}$   
 $\triangle BDP \cong \triangle BDC$  (SAS)  $\rightarrow \angle BPD = \angle DCB = 30^\circ$

選 D。



- ( C )2. 叮叮在解一道等差級數求總和的問題，如下：

求等差級數  $5 + \bullet + 33 + \bullet + 54 + \bullet + 82$  的和，因為叮叮不慎塗汙該題目部分的項目，且已知該級數的公差為正整數，另三個污漬遮覆的項數均不超過 3 項，請問這個等差級數的總和為何？

- (A) 348 (B) 435 (C) 522 (D) 696

<解析>

$33 - 5 = 28$ ， $54 - 33 = 21$ ， $82 - 54 = 28$

$(21, 28) = 7 \rightarrow$  公差可能為 1 或 7

$\therefore$  遮覆的項目均不超過 3 項

$\therefore$  該公差 = 7

故項數 =  $(82 - 5) \div 7 + 1 = 12$

總和 =  $(5 + 82) \times 12 \div 2 = 522$ ，選 C。

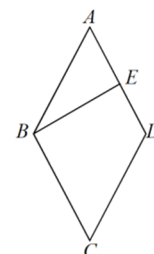
- ( B )3. 設  $A = (x-1)(x+2)^3 - 4(x-1)^3(x+2)$ ，下列哪一式不是  $A$  的因式？  
 (A)  $x(x-1)$  (B)  $(3x+1)(x+2)$  (C)  $(x-1)(x+2)$  (D)  $(x+2)(x-4)$

<解析>

$$\begin{aligned} A &= (x-1)(x+2)^3 - 4(x-1)^3(x+2) \\ &= (x-1)(x+2)[(x+2)^2 - 4(x-1)^2] \\ &= (x-1)(x+2)[(x+2-2x+2)(x+2+2x-2)] = (x-1)(x+2)(-x+4)(3x) \end{aligned}$$

∴ 只有  $(3x+1)(x+2)$  不是  $A$  的因數，選 B。

- ( C )4. 已知菱形的高與它的周長比是 1 : 8，則其內角的比是？  
 (A) 5:5:1:1 (B) 2:5:5:2 (C) 1:5:1:5 (D) 5:2:5:2



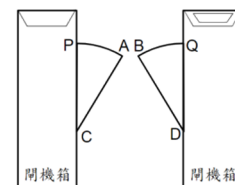
<解析>

如圖， $\overline{BE}$  是菱形  $ABCD$  的高，令  $\overline{BE} = 1$ ，且  $\overline{AB} = 8 \div 4 = 2$

$\overline{BE} : \overline{AB} = 1 : 2$  且  $\angle AEB = 90^\circ \rightarrow \angle A = 30^\circ$

故內角比依序 =  $30^\circ : 150^\circ : 30^\circ : 150^\circ = 1 : 5 : 1 : 5$ ，選 C。

- ( C )5. 已知某捷運刷卡閘機通道的門是兩個全等的扇形，如圖所示，已知  $\overline{PC} = 54$  cm， $\overline{AB} = 10$  cm， $\angle PCA = 30^\circ$ ，則開口寬  $\overline{PQ}$  的距離為 \_\_\_\_\_ cm. (A) 60 (B) 62 (C) 64 (D) 66



<解析>

$$\overline{AC} = \overline{PC} = 54, \quad 54 \times \frac{1}{2} \times 2 + 10 = 64$$

選 C。

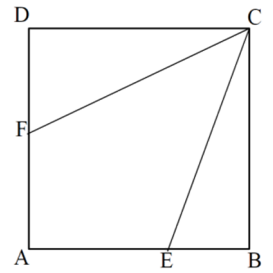
- ( C )6. 已知  $a = \frac{1}{19}x + 2020$ ,  $b = \frac{1}{19}x + 2019$ ,  $c = \frac{1}{19}x + 2021$ ，則  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca =$  \_\_\_\_\_ . (A) 2 (B) 0 (C) 3 (D) 6

<解析>

$$\text{原式} = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2] = \frac{1}{2}[1+1+4] = 3$$

( A )7. As show in the figure, the side length of square ABCD is 4, point E,F lie on side AB and AD. If  $\overline{CE} = 2\sqrt{5}$ , then  $\angle ECF = 45^\circ$ , what is the length of CF?

- (A)  $\frac{4\sqrt{10}}{3}$  (B)  $\frac{3\sqrt{10}}{2}$  (C)  $\frac{5\sqrt{5}}{3}$  (D)  $\frac{7\sqrt{5}}{6}$



<解析>

$$\overline{BE} = 2, \overline{AE} = 2, \text{ 設 } \overline{DF} = x$$

$$\overline{CF} = \sqrt{16+x^2}, \overline{AF} = 4-x$$

$$\overline{EF} = \overline{DF} + \overline{BE} = 2+x$$

$$\overline{EF} = \sqrt{(4-x)^2 + 4}, x = \frac{4}{3}$$

$$\overline{CF} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$$

( B )8. 設等式  $\sqrt{a(x-a)} + \sqrt{a(y-a)} = \sqrt{x-a} - \sqrt{a-y}$  在實數範圍內成立，其中  $a, x, y$

是兩兩不等的實數，則  $\frac{2x^2 + xy - 2y^2}{x^2 - 2xy + 3y^2}$  的值是?

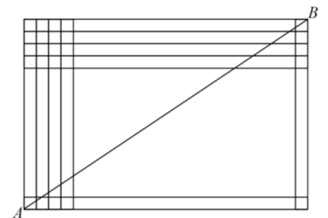
- (A)  $-\frac{3}{8}$  (B)  $-\frac{1}{6}$  (C)  $-\frac{9}{10}$  (D)  $-\frac{5}{7}$

<解析>

$$a=0, x=-y, \text{ 原式} = -\frac{1}{6}$$

## 二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 如圖， $52 \times 28$  的正方形方格紙中，連接對角線  $\overline{AB}$ ，則除了  $A$ 、 $B$  兩點以外，還會通過\_\_\_\_\_個格子點。



<解析>

設  $A$  為原點，橫軸為  $x$  軸，縱軸為  $y$  軸

則  $B$  點坐標  $(52,28)$

假設  $y = ax + b$ ，代入  $(0,0)$   $(52,28)$

$$\therefore a = \frac{7}{13}, b = 0, \text{ 直線方程式 } y = \frac{7}{13}x$$

通過格子點  $(13,7)$ 、 $(26,14)$ 、 $(39,21)$ ，共三點

2. 某工廠分別生產 A,B 兩種產品 1 箱時所需要的煤、電以及獲得的純利潤如下表所示。

	煤 (噸)	電 (千度)	純利潤 (萬元)
1 箱 A 產品	3	1	4
1 箱 B 產品	1	1	3

若生產 A,B 兩種產品可使用的煤不超過 100 噸，電不超過 60 千度，則可獲得的最大純利潤和是\_\_\_\_\_萬元。

<解析>

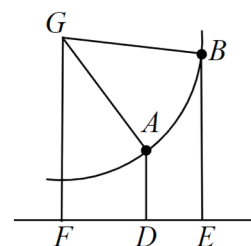
設有 A 產品  $x$  箱，B 產品  $y$  箱

$$\begin{cases} 3x + y \leq 100 \\ x + y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$t = 4x + 3y$$

$$\text{所以 } t_{\max} = 200$$

3. 小慈盪鞦韆，當鞦韆盪到 A、B 兩點時，各投下一顆彈珠，使彈珠垂直落在 D、E 兩處，若測得  $\overline{GA} = \overline{GB} = 25$ ， $\overline{DF} = 15$ ， $\overline{EF} = 24$ ，請問 A、B 兩點的距離是\_\_\_\_\_。



<解析>

過 B 作  $\overline{BH} \perp \overline{GF}$  於 H

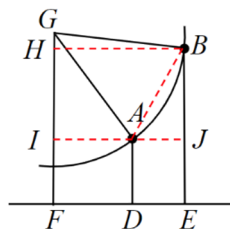
$$\overline{BH} = \overline{EF} = 24, \overline{GH} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$$

過 A 作  $\overline{IJ} \perp \overline{GF}$  於 I、J

$$\triangle AGI, \overline{GI} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$$

$$\overline{HI} = \overline{BJ} = 20 - 7 = 13$$

$$\text{連接 } \overline{AB}, \triangle ABJ \text{ 中, } \overline{AB} = \sqrt{13^2 + 9^2} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$$



4. Use five sticks of 4cm, 5cm, 6cm, 7cm and 8cm to form a triangle, where any side can be connected with two or more sticks but no stick should be broken into two smaller sticks. What is the largest possible area of triangle can be formed?

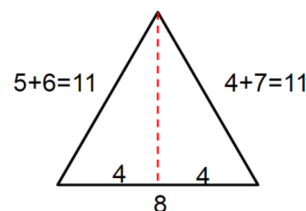
<解析>

5+6+7+8+9=30, 30÷3=10(周長固定下, 越接近正三角形面積是最大的)

故三邊長=(4+7, 5+6, 8)

三角形的高= $\sqrt{11^2 - 4^2} = \sqrt{121 - 16} = \sqrt{105}$

故面積= $8 \times \sqrt{105} \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{105}$

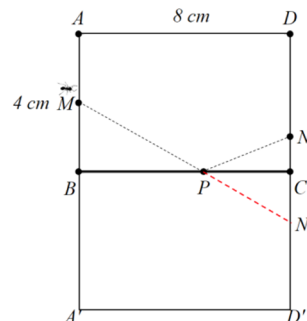
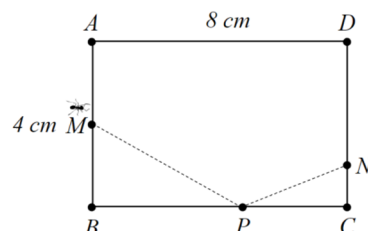


5. 已知 ABCD 為長方形,  $\overline{AB} = 4$ ,  $\overline{AD} = 8$ , M 為  $\overline{AB}$  中點, N 在  $\overline{CD}$  上且  $\overline{CN} = \frac{1}{4}\overline{CD}$ , 今有一隻螞蟻從 M 走到  $\overline{BC}$  上某一點 P, 在走到 N, 所走的路徑之長的最小值是\_\_\_\_\_.

<解析>

以  $\overline{BC}$  為對稱軸, 作 ABCD 之線對稱圖形 A'BCD' 且 N 的對稱點是 N', 若要使所走路徑為最小值,

則 M、P、N' 三點共線,  $\overline{MN} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$



6. 甲、乙兩人沿相同的路線由 A 地到 B 地各自等速率行進, 已知 A、B 兩地間的距離為 30 公里, 甲、乙兩人行進的路徑長與甲出發後的時間的線型函數圖形如圖所示, 則甲比乙晚\_\_\_\_\_個小時抵達 B 地。

<解析>

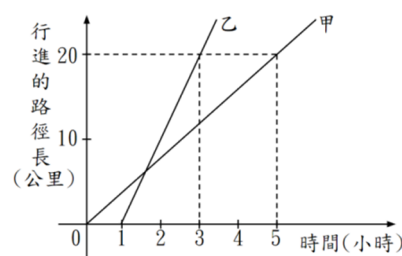
假設乙抵達 B 地所需要的時間為 t 小時

20 : 2 = 30 : t, t = 3(小時)

假設甲抵達 B 地所需要的時間為 s 小時

20 : 5 = 30 : s, s = 7.5(小時)

故甲比乙晚 7.5 - (3 + 1) = 3.5 小時



7. 已知整數  $x, y$ ，滿足  $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4}\right)$ ，則滿足題意的  $x, y$  的值有 \_\_\_\_\_ 組。

<解析>

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}, \text{ 共 2 組解.}$$

8. 有一滿池水，池底有泉總能均勻向外湧流，已知用 32 部 A 型抽水機 10 天可抽乾池水，若用 26 部 A 型抽水機 16 天也可抽乾池水，設每部抽水機單位時間的抽水量相同，要使這一水池永遠抽不乾，最多只能用 \_\_\_\_\_ 部 A 型抽水機抽水。

<解析>

假設原池水為  $a$ ，每天泉水湧流  $b$ ，抽水機抽水量  $c$

$$\begin{cases} a + 10b = 32c \times 10 \\ a + 16b = 26c \times 16 \end{cases} \rightarrow 320c - 10b = 416c - 16b, \quad 6b = 96c, \quad b = 16c$$

∴ 最多 16 部

三、計算題(10 分/10 分，共 20 分) ※未寫計算過程不予計分

1. 美滿社區舉辦三天兩夜的墾丁之旅，有 88 人參加，行李共有 200 件，區委會計畫租用 A、B 兩型遊覽車共 5 輛，其中 A 型車每輛載客 16 人和 45 件行李，每日租金 7000 元；B 型車每輛載客 25 人和 35 件行李，每日租金 8000 元。

(1) 區委會有幾種租車方式？

(2) 哪種租車方案最省錢？此時租金共多少元？

<解析>

(1) 假設 A 型遊覽車  $x$  輛，B 型遊覽車  $5-x$  輛

$$\begin{cases} 16x + 25(5-x) \leq 88 \\ 45x + 35(5-x) \geq 200 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 4.1 \\ x \geq 2.5 \end{cases}, \quad 2.5 \leq x \leq 4.1, \quad x = 3 \text{ 或 } x = 4 \text{ (} x \text{ 為正整數)}$$

故有兩種租車方式：① A 型車 3 輛、B 型車 2 輛 ② A 型車 4 輛、B 型車 1 輛

(2) 當 A 型車 3 輛、B 型車 2 輛

$$\therefore 7000 \times 3 + 8000 \times 2 = 21000 + 16000 = 37000$$

當 A 型車 4 輛、B 型車 1 輛

$$\therefore 7000 \times 4 + 8000 \times 1 = 28000 + 8000 = 36000 \text{ (最便宜)}$$

→ 三天兩夜共花費  $36000 \times 3 = 108000$  元

故選 A 型車 4 輛、B 型車 1 輛的方案

2. 已知點  $A, B$  分別在  $x$  軸,  $y$  軸上.

(1) 如圖 1  $\triangle ABC$  是等腰直角三角形,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $x$  軸恰好平分  $\angle BAC$ ,  $BC$  交  $x$  軸於點  $M$ , 過點  $C$  作  $\overline{CD} \perp x$  軸於  $D$  點, 則  $\frac{\overline{CD}}{\overline{AM}}$  的值為?

(2) 如圖 2, 若點  $A$  的座標為  $(-4, 0)$ , 點  $B$  在  $y$  軸的正半軸上運動時, 分別以  $\overline{OB}$ 、 $\overline{AB}$  為邊在第一、第二象限中作等腰  $\text{Rt}\triangle OBE$ , 等腰  $\text{Rt}\triangle ABF$ , 連接  $\overline{EF}$  交  $y$  軸於  $P$  點, 當點  $B$  在  $y$  軸上移動時,  $\overline{PB}$  的長度是否發生變化?

若不變, 求出  $\overline{PB}$  的值; 若改變, 求  $\overline{PB}$  的取值範圍?

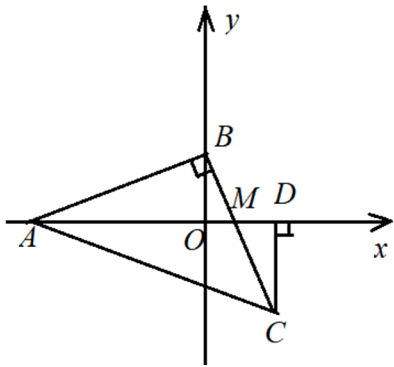


圖 1

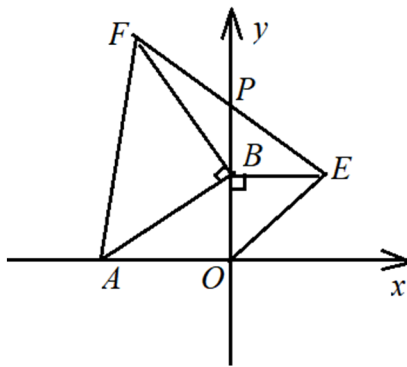


圖 2

<解析>

(1)  $\frac{1}{2}$

(2) 過  $F$  作  $\overline{FQ} \perp y$  軸於  $Q$ ,  $\triangle AOB \cong \triangle BQF$

所以  $\overline{AO} = \overline{BQ}$ , 所以  $\overline{OB} = \overline{QF}$

$\therefore \triangle FPQ \cong \triangle EPB$

$\therefore \overline{PB} = \overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{OA} = 2$

