

2020 第十六屆  國際數學競賽複賽(台灣)  
2020 Sixteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

國  
中  
一  
年  
級  
試  
卷

考試時間：90 分鐘 卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

# 2020 第十六屆 國際數學競賽複賽(台灣)

2020 Sixteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

- ( B )1. 若  $a$ 、 $b$  為兩個相異質數，且  $a-b=30$ ，則  $a+b$  的最小值為何?  
(A)36 (B)44 (C)52 (D)56

<解析>

$$a-b=30 \rightarrow a=30+b$$

$$\therefore b=2, a=30+2=32 \text{ (不合)}$$

$$\therefore b=3, a=30+3=33 \text{ (不合)}$$

$$\therefore b=5, a=30+5=35 \text{ (不合)}$$

$$\therefore b=7, a=30+7=37$$

故  $a+b=7+37=44$ ，選 B。

- ( B )2. 甲用 10000 元購買了一手股票，隨即他將這手股票轉賣給乙，獲利 10%，而後乙又將這手股票反賣回給甲，但乙損失 10%，最後甲按乙賣給甲的價格的九折將這手股票賣給了乙，在上述股票交易中  
(A)甲剛好虧盈平衡 (B)甲營利 10 元  
(C)甲虧本 1090 元 (D)甲虧本 11 元

<解析>

$$\text{甲賣出 } 10000 \times (1+10\%) = 11000, \text{ 乙賣回給甲 } 11000 \times (1-10\%) = 9900$$

$$\text{甲又賣 } 9900 \times 0.9 = 8910$$

$$\text{甲賺 } 1000 - (9900 - 8910) = 10$$

- ( D )3. 已知  $6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 30240$ ，則  $(-10) \times (-12) \times (-14) \times (-16) \times (-18)$  之結果?  
(A)302400 (B)483840 (C)-302400 (D)-483840

<解析>

$$(-10) \times (-12) \times (-14) \times (-16) \times (-18) = -2^4 \times (6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10) = -16 \times 30240 = -483840,$$

選 D。

- ( B )4. 點  $P(x,y)$  為平面直角坐標系  $xOy$  內一點， $xy > 0$ ，且點  $P$  到  $x$  軸,  $y$  軸的距離分別為 2,5，則點  $P$  的坐標為\_\_\_\_\_。  
 (A) (2, 5) 或 (-2, -5) (B) (5, 2) 或 (-5, -2)  
 (C) (-2, 5) 或 (2, -5) (D) (5, -2) 或 (-5, 2)

<解析>

選 B

- ( D )5. 有一列數  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ ，其中  $a_1 = 5 \times 2, a_2 = 5 \times 3 + 1, a_3 = 5 \times 4 + 2, a_4 = 5 \times 5 + 3, a_5 = 5 \times 6 + 4, \dots$ ，按照這個規律，當  $a_n = 2020$  時， $n$  的值等於\_\_\_\_\_。(A)330 (B)332 (C)334 (D)336

<解析>

$$a_n = 5(n+1) + (n-1) = 6n + 4 = 2020, \text{ 所以 } n = 336$$

- ( A )6. Observe the relationship of the numbers in “田”, then  $c =$ \_\_\_\_\_.

1	2	3	6	5	12	7	22	.....	2019	a
2	3	4	7	8	13	16	23		b	c

- (A)  $2019 + 2^{1010}$  (B)  $2020 + 2^{2020}$  (C)  $2019 + 2^{2020}$  (D)  $2020 + 2^{1010}$

<解析>

$$c = 2019 + b,$$

$$2n - 1 = 2019, n = 1010.$$

$$b = 2^{1010}, c = 2019 + 2^{1010}$$

- ( B )7. 將紅、黃、藍 3 個球隨機放入 5 個不同的盒子  $A, B, C, D, E$  中，恰有兩個球放在同一盒子的方法數為\_\_\_\_\_。  
 (A)65 (B)60 (C)63 (D)58

<解析>

球的組合: 紅黃+藍、黃藍+紅、藍紅+黃

放入不同盒子 =  $5 \times 4 = 20$

$$\therefore 3 \times 5 \times 4 = 60.$$

- ( B )8. 將正整數按如圖所示規律排列，若有序數對 $(n, m)$ 表示第 $n$ 排第 $m$ 個數，比如 $(4, 3)$ 表示數9，則表示數2020所在位置的 $n+m =$ \_\_\_\_\_。  
(A)67 (B)68 (C)69 (D)70

```

      1
     2 3
    4 5 6
   7 8 9 10
  .....

```

<解析>

第 $n$ 排最後一個數為  $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \leq 2020$   
 $n_{\max} = 63$ ，2020 在 $(64, 4)$ ， $m+n=68$

## 二、填充題(每題5分，共40分)

1. 請計算  $3^{2020} - 5 \times 3^{2019} + 6 \times 3^{2018} + 2020 =$ \_\_\_\_\_。

<解析>

$$3^{2020} - 5 \times 3^{2019} + 6 \times 3^{2018} + 2020 = 3 \times 3 \times 3^{2018} - 5 \times 3 \times 3^{2018} + 6 \times 3^{2018} + 2020 = 0 + 2020 = 2020$$

2. 有若干孩子就讀中小學，他們的年齡之積為60060，至少有\_\_\_\_\_位孩子就讀中小學。

<解析>

$$60060 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$$

∵ 中小學年齡範圍6歲~15歲

∴ 6、7、10、11、13歲，至少5位孩子

3. 有一滿池水，池底有湧泉總能均勻向外湧流，已知用32部A型抽水機10天可抽乾池水，若用26部A型抽水機16天也可抽乾池水，設每部抽水機單位時間的抽水量相同，要使這一水池永遠抽不乾，最多只能用\_\_\_\_\_部A型抽水機抽水。

<解析>

假設原池水為 $a$ ，每天泉水湧流 $b$ ，抽水機抽水量 $c$

$$\begin{cases} a + 10b = 32c \times 10 \\ a + 16b = 26c \times 16 \end{cases} \rightarrow 320c - 10b = 416c - 16b, \quad 6b = 96c, \quad b = 16c$$

∴ 最多16部

4. 已知麵包店的麵包一個 15 元，心雅去此店買麵包，結帳時店員告訴心雅：「如果妳再多買一個麵包就可以打九折，價錢會比現在便宜 45 元」，心雅說：「我買這些就好了，謝謝。」根據兩人的對話，判斷結帳時，心雅買了\_\_\_\_\_個麵包。

<解析>

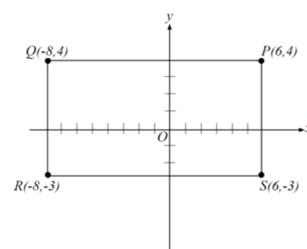
假設心雅買了  $x$  個麵包

$$15x - 15(x+1) \times 0.9 = 45$$

$$3x - 3(x+1) \times 0.9 = 9$$

$$3x - 2.7x - 2.7 = 9, \quad 0.3x = 11.7, \quad x = 39$$

5. 如圖，長方形  $PQRS$  為地圖上一個長方形公園，其坐標分別如右圖所示，今小喬和阿德兩人同時由  $P$  點出發繞著公園健走，小喬按順時針方向每分鐘 2 個單位長，而阿德按逆時針方向每分鐘走 1 個單位長，則兩個人由  $P$  點出發後，請問第一次相遇的位置坐標是\_\_\_\_\_。



<解析>

假設兩人走了  $x$  分鐘相遇

$$2x + x = 2 \times (7+14) \rightarrow x = 14$$

$\therefore$  小喬 =  $14 \times 2 = 28$  個單位，阿德 =  $14 \times 1 = 14$  個單位

由  $P$  點依順時針方向走了 28 個單位，到達  $(-8, 4)$

故第一次相遇時的位置坐標為  $(-8, 4)$

6. 現有 12 個人，其中 6 人只會英語，4 人只會日語，2 人兩種語言都會，從中選出 3 人做翻譯，要求兩種都有人翻譯，則符合條件的選法有\_\_\_\_\_種。

<解析>

$$\frac{12 \times 11 \times 10}{6} - \frac{6 \times 5 \times 4}{6} - \frac{4 \times 3 \times 2}{6} = 196$$

7. How many triangles are there with three sides are integer and the longest side is 11? \_\_\_\_\_

<解析>

最短邊是 5 的， $(5, 7, 11)$   $(5, 8, 11)$   $(5, 9, 11)$   $(5, 10, 11)$   $(5, 11, 11)$  共 5 種情況；

最短邊是 6 的， $(6, 6, 11)$   $(6, 7, 11)$   $(6, 8, 11)$   $(6, 9, 11)$   $(6, 10, 11)$   $(6, 11, 11)$  共 6 種情況；

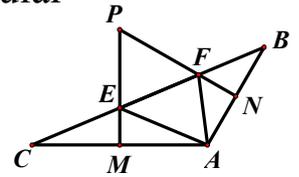
最短邊是 7 的， $(7, 7, 11)$   $(7, 8, 11)$   $(7, 9, 11)$   $(7, 10, 11)$   $(7, 11, 11)$  共 5 種情況；

最短邊是 4, 8 的共 4 種情況；最短邊是 3, 9 的共 3 種情況；

最短邊是 2, 10 的共 2 種情況；最短邊是 1, 11 的共 1 種情況。

綜上共  $2(1+2+3+4+5)+6=36$ 。

8. In  $\triangle ABC$  as show,  $\angle BAC = 120^\circ$ ,  $\overline{PM}$ ,  $\overline{PN}$  are perpendicular bisector of  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{PM}$  intersect  $\overline{PN}$  at point P,  $\overline{PM}$  intersect  $\overline{BC}$  at point E,  $\overline{PN}$  intersect  $\overline{BC}$  at point F, Then which of the following are the correct statements? \_\_\_\_\_ . (Fill in the serial number)



①  $\angle P = 60^\circ$ , ②  $\angle EAF = 60^\circ$ , ③  $\overline{PB} = \overline{PC}$ , ④  $\overline{PE} = \overline{PF}$

<解析>

①②③

### 三、計算題(10分/10分，共20分) ※未寫計算過程不予計分

1. 神鬼奇航中的小插曲:傑克從獲得的藏寶圖中解讀出海盜藏寶的小島，它位在快樂島與逍遙島之間，且三座小島在同一直線上，而藏寶小島到快樂島的距離是藏寶小島到逍遙島的3倍，經查證快樂島位置位於坐標平面上 $(-10, -9)$ 的位置，逍遙島位於坐標平面上 $(22, 19)$ 的位置，則:

(1)藏寶小島的位置在平面坐標的哪裡?

(2)試求此直線方程式?

<解析>

(1)中點坐標的求法:

$$\left( \frac{-10+22}{2}, \frac{-9+19}{2} \right) = (6, 5)$$

$$\left( \frac{6+22}{2}, \frac{5+19}{2} \right) = (14, 12)$$

(2)設直線方程式  $y = ax + b$ ，通過 $(14, 12)$ 、 $(22, 19)$

$$12 = 14a + b$$

$$19 = 22a + b$$

$$\therefore 8a = 7, a = \frac{7}{8}, b = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{直線方程式 } y = \frac{7}{8}x - \frac{1}{4}$$

圖略

2. 對於任意一點  $P$  和線段  $a$ . 過點  $P$  向線段  $a$  所在直線作垂線, 若垂足落線段  $a$  上, 則稱點  $P$  為線段  $a$  的內垂點. 在平面直角坐標系  $xOy$  中, 已知點  $A(-1,0), B(2,0), C(0,2)$ .

(1) 在點  $M(1,0), N(3,2), P(-1,-3)$  中, 是線段  $AB$  的內垂點的是?

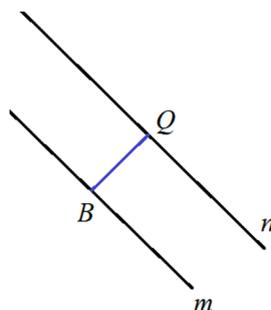
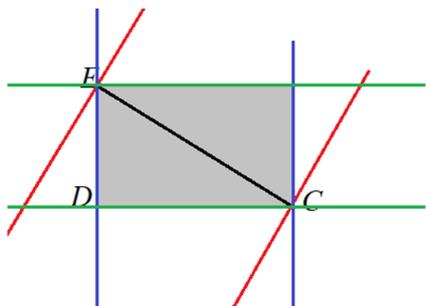
(2) 已知點  $D(-3,2), E(-3,4)$ . 畫出平面直角坐標系和相關區域, 使區域內的每個點均為  $\text{Rt} \triangle CDE$  三邊的內垂點, 試在圖中用陰影表示符合題意的區域.

(3) 已知直線  $m$  與  $x$  軸交於點  $B$ , 與  $y$  軸交於點  $C$ , 將直線  $m$  沿  $y$  軸平移 3 個單位長度得到直線  $n$ . 若存在點  $Q$ , 使線段  $BQ$  的內垂點形成的區域恰好是直線  $m$  和  $n$  之間的區域 (包括邊界), 直接寫出點  $Q$  的所有可能坐標.

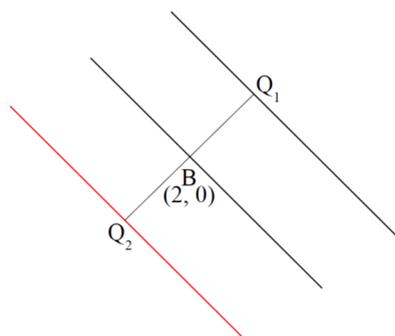
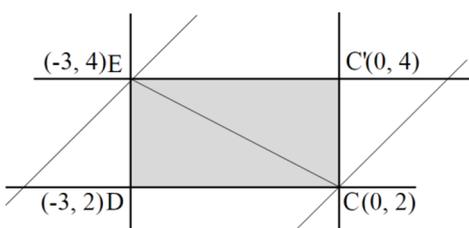
<解析>

(1)  $M, P$

(2)



(3)  $BQ \perp m$ , 則  $Q\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$  或  $Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$



$$Q_1\left(2 + \frac{3}{2}, 0 + \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad Q_2\left(2 - \frac{3}{2}, 0 - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$