2020 第十六屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)

2020 Sixteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

高中二年級試卷

考試時間：90 分鐘　　卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

2020 第十六屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)

2020 Sixteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

(B)1. 設 $x>0$，$y>0$，已知 $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=1$，則 xy 最小值為何?

(A)12　(B)24　(C)18　(D)36

<解析>

$\because x>0$，$y>0 \Rightarrow \frac{3}{x}>0$，$\frac{2}{y}>0$

由算幾不等式

$\therefore \frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{2} \geq \sqrt{\frac{3}{x}\cdot\frac{2}{y}} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt{\frac{6}{xy}}$，$\frac{1}{4} \geq \frac{6}{xy}$

$\therefore xy \geq 24$，故 xy 的最小值為 24，選 B。

(A)2. "△ABC 為銳角三角形"是" $\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$ 的 ________條件。

(A)充分不必要(B)必要不充分(C)充分必要 (D)既不充分也不必要

<解析>

銳角三角形中：$\pi > A+B > \frac{\pi}{2} > A \Rightarrow \frac{\pi}{2} > A > \frac{\pi}{2}-B > 0$ $\therefore \sin A > \sin(\frac{\pi}{2}-B)=\cos B$，同理 $\sin B>\cos C$，$\sin C>\cos A$，所以充分。

則等腰直角三角形，$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$ 也成立，所以不必要，選 A。

(C)3. 多項式 $f(x)=(x^{2019}-366x^{2018}+365)^3$ 除以 x^2-1 所得之餘式為何?

(A) $2x-2$　(B) $3x-3$　(C) $4x-4$　(D) $5x-5$

<解析>

$\because f(x)=(x^{2019}-366x^{2018}+365)^3$

$\therefore f(1)=(1-366+365)^3=0$，$f(-1)=(-1-366+365)^3=-8$

設 $f(x)=(x-1)(x+1)q(x)+a(x+1)+b$

$\therefore f(1)=2a+b=0$，$f(-1)=b=-8$，$a=4$

故餘式 $=4(x+1)-8=4x-4$，選 C。

(D)4.方程 $\sqrt[3]{15x+1-x^2}+\sqrt[3]{x^2-15x+27}=4$ 的實根個數為________。
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 個

<解析>

$\because 15x+1-x^2+x^2-15x+27=28$ 為定值，令 $t=15x+1-x^2$，則 $x^2-15x+27=28-t$

原式$=t^{\frac{1}{3}}+(28-t)^{\frac{1}{3}}=4$ ➔ $t+3t^{\frac{1}{3}}(28-t)^{\frac{2}{3}}+3t^{\frac{2}{3}}(28-t)^{\frac{1}{3}}+28-t=4^3$

➔ $t^{\frac{1}{3}}(28-t)^{\frac{2}{3}}+t^{\frac{2}{3}}(28-t)^{\frac{1}{3}}=12$，$t^{\frac{1}{3}}(28-t)^{\frac{1}{3}}\cdot[t^{\frac{1}{3}}+(28-t)^{\frac{1}{3}}]=12$

$\therefore t^{\frac{1}{3}}+(28-t)^{\frac{1}{3}}=3$，故 $t^{\frac{1}{3}}=1$ 或 $t^{\frac{1}{3}}=3$ ➔ $t=1$ 或 $t=27$

$15x+1-x^2=1$ 或 $15x+1-x^2=27$ ➔ $x_1=0$，$x_2=15$，$x_3=2$，$x_4=13$，選 D。

(C)5.在△ABC 中，$\angle A=84^\circ$，$\angle B=36^\circ$，$\overline{AB}=2\sqrt{3}$，求△ABC 外接圓半徑是?
(A)1 (B)$\sqrt{3}$ (C)2 (D)$\sqrt{6}$

<解析>

$\angle C=180^\circ-84^\circ-36^\circ=60^\circ$

故 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R$，$R=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$，選 C。

(A)6. 已知 A, B, C 為三角形的內角，且 $\tan A$、$\tan B$、$\tan C$ 均為整數，則 $\tan A$ 的取值不可能為? (A)4 (B)3 (C)2 (D)1

<解析>

$\because \tan A=-\tan(B+C)=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C}$，令 $k=\tan A$，$x=\tan B$，$y=\tan C$，則

k、x、$y\in Z$，$k=-\dfrac{x+y}{1-xy}$ ➔ $k+x+y=kxy$ 且 1+2+3=1×2×3

∴k 取 1、2、3 皆可，選 A。

(A)7. Ariel, Bob, and Cathy are sharing 5 different books and 4 identical pens. If each of them can get at least one book or one pen. How many ways are there for them to share? (A)3168 (B)3200 (C)3216 (D)3321

<翻譯>有 5 本不同的書及 4 枝相同的筆分給 Ariel、Bob、Cathy 三人，若 Ariel、Bob、Cathy 均至少分得一本書或一枝筆，則共有幾種分法?

<解析>

任意分-(某 1 人不分)+(某 2 人不分)

$=3^5\times H_4^3-C_1^3\times 2^5\times H_4^2+C_2^3\times 1^3\times H_4^1$

=243×15-3×32×5+3=3168

(C)8. There is a curve $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ crosses with x-axis at point A and B. Point A is on the coordinate system and locate on the left of point B. If we use the point A as the rotation axis and rotate the curve through $90°$ anticlockwise direction. what is the new equation of the curve?

(A) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ (B) $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

(C) $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$ (D) $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$

<翻譯>曲線 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 與 x 軸交於 A 、 B 兩點，其中 A 在坐標系上，位於 B 的左邊。則以 A 點為軸，將曲線逆時針旋轉 $90°$ ，所得的新曲線的方程為?

<解析>

令 $y=0$ ，得出交點坐標(3, 0) (-3, 0)

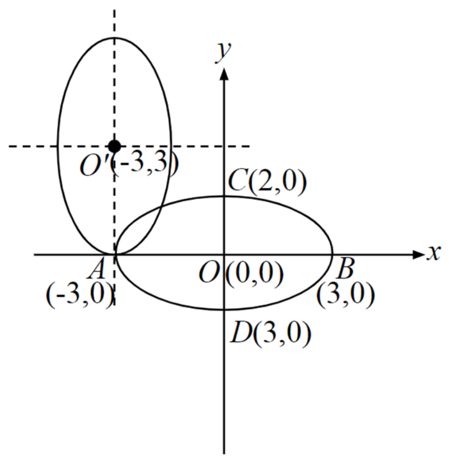
令 $x=0$ ，得出交點坐標(0, 2) (-2, 0)

原中心點(0, 0)

以 A 點為軸，逆時針旋轉 90 度

如圖，新中心點(-3, 3)

故新曲線方程為 $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$



二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 試求過三點(-3，7)、(4，6)、(3，-1)的圓的方程式為________。

<解析>

假設圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

$-3d+7e+f+58=0$

$4d+6e+f+52=0$

$3d-e+f+10=0$

得 $d=0$ ， $e=-6$ ， $f=-16$

$\therefore x^2+y^2-6y-16=0$

2. 設方程 $\log_{3x}3+\log_{27}3x=-\dfrac{4}{3}$ 的兩個根是 a 和 b ，則 $ab=$________。

<解析>

$t=\log_3 3x$ ，則 $\dfrac{1}{t}+\dfrac{t}{3}=-\dfrac{4}{3}$ ，$t=$-1、-3

$\log_3 3x=-1$ ，$x=\dfrac{1}{9}$ ；$\log_3 3x=-3$ ，$x=\dfrac{1}{81}$

故 $ab=\dfrac{1}{9}\times\dfrac{1}{81}=\dfrac{1}{729}$

3. 設 k 為實數，$y=kx^2+k$ 之圖形在 $y=-x$ 圖形下方，則 k 的範圍為________。

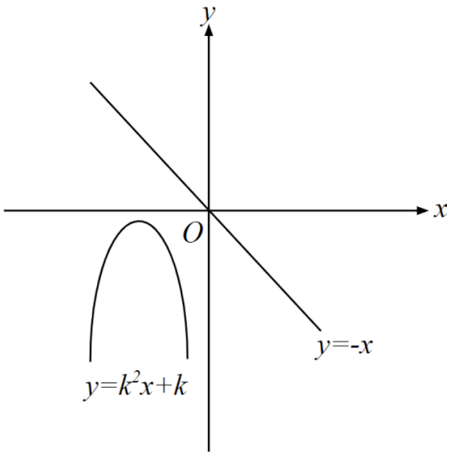
<解析>

$\because -x>kx^2+k$ 恆成立

$\therefore kx^2+x+k>0$ 恆真

$\therefore \begin{cases} k<0 \\ D=1-4k^2<0 \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} k<0 \\ (2k+1)(2k-1)<0 \end{cases}$

$\therefore k<-\dfrac{1}{2}$ 為所求



4. 已知函數 $f(x)=2mx^2-2(4-m)x+1$，$g(x)=mx$，若對於任一實數 x，$f(x)$ 與 $g(x)$ 至少有一個為正數，則實數 m 的取值範圍為________。

<解析>

$m\le 0$ ，當 x 接近 $+\infty$ 時，函數 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均非正，不符合題意。

當 $x=0$ 時， $f(0)=1>0$

當 $x>0$ 時，$\therefore -\dfrac{b}{2a}=\dfrac{4-m}{2m}\ge 0$ ，即 $0<m\le 4$ 成立

若 $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{4-m}{2m}<0$ ，$D=4(4-m)^2-8m<0$ ，$4<m<8$

故 $0<m<8$ ，即 $m\in(0,8)$

5. 設θ為一銳角，且$5\cos\theta-\sin\theta=1$，則$\sin\theta=$________。

<解析>

$\because 5\cos\theta-\sin\theta=1 \Rightarrow 5\cos\theta=\sin\theta+1$

$\therefore (5\cos\theta)^2=(\sin\theta+1)^2$，$25\cos^2\theta=\sin^2\theta+2\sin\theta+1$

$\therefore 25(1-\sin^2\theta)=\sin^2\theta+2\sin\theta+1$，$26\sin^2\theta+2\sin\theta-24=0$

$\therefore (13\sin\theta-12)(\sin\theta+1)=0$，$\sin\theta=\dfrac{12}{13}$ 或-1(不合)

6. 函數$y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$的值域為________。

<解析>

$y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$，$y-x=\sqrt{x^2-3x+2}\geq 0$，$(y-x)^2=(\sqrt{x^2-3x+2})^2$

$y^2-2xy=-3x+2 \Rightarrow x=\dfrac{y^2-2}{2y-3}\leq y$，$\dfrac{y^2-2}{2y-3}-y\leq 0$，$\dfrac{y^2-2-2y^2+3y}{2y-3}\leq 0$

$\Rightarrow \dfrac{-y^2+3y-2}{2y-3}\leq 0$，$\dfrac{y^2-3y+2}{3-2y}\leq 0$，$\dfrac{(y-2)(y-1)}{3-2y}\leq 0$

討論分子分母異號

$$\begin{cases}(y-2)(y-1)\geq 0\\ 3-2y<0\end{cases} \Rightarrow y\in[2,+\infty)$$

或

$$\begin{cases}(y-2)(y-1)\leq 0\\ 3-2y>0\end{cases} \Rightarrow y\in[1,\frac{3}{2})$$

$y\in[1,\ \frac{3}{2})\cup[2,\ +\infty)$

7. 設正項等差數列$\{a_n\}$的前 n 項和為S_n，若S_{2019}=4038，則$\dfrac{1}{a_{10}}+\dfrac{9}{a_{2010}}$的最小值為＿＿＿＿＿。

<解析>

$$S_{2019}=(a_1+a_{2019})\cdot\frac{2019}{2}=(a_{10}+a_{2010})\cdot\frac{2019}{2}=4038 \Rightarrow a_{10}+a_{2010}=4$$

$$\frac{1}{a_{10}}+\frac{9}{a_{2010}}=\frac{1}{4}\times(\frac{1}{a_{10}}+\frac{9}{a_{2010}})\times(a_{10}+a_{2010})=\frac{1}{4}\times(1+\frac{9a_{10}}{a_{2010}}+\frac{a_{2010}}{a_{10}}+9)$$

$$\geq\frac{1}{4}\times(2\cdot\sqrt{\frac{9a_{10}}{a_{2010}}\times\frac{a_{2010}}{a_{10}}}+10)=\frac{1}{4}\times(2\cdot3+10)=4$$

8. Adam and Brown take turns rolling a fair dice, the person who first get one dot win. The game starts from Adam. What is the probability of Adam wins? ＿＿＿＿＿.

<翻譯>Adam、Brown 兩人輪流投擲一粒公正的骰子，並約定先擲得 1 點者獲勝，有 Adam 先開始，則 Adam 獲勝的機率為＿＿＿＿＿。

<解析>

Adam 獲勝情形: ○，××○，××××○，.......[擲得 1 點為○，非擲得 1 點為×]

故 Adam 獲勝的機率為$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+\ldots\ldots=\dfrac{\frac{1}{6}}{1-(\frac{5}{6})^2}=\frac{6}{11}$

三、計算題(10 分/10 分，共 20 分）※未寫計算過程不予計分

1. 如果a、b、c都是整數，且$a^2+3b^2+3c^2+13<2ab+4b+12c$，求$\sqrt{(c+a)-(a+b)\sqrt{ac}}$的值?

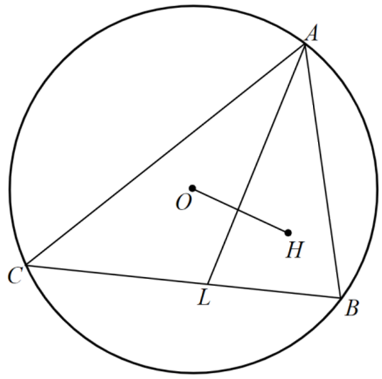
<解析>

原式=$(a^2-2ab+b^2)+2(b^2-2b+1)+3(c^2-4c+4)<1$

$\therefore(a-b)^2+2(b-1)^2+3(c-2)^2=0$，$\therefore a=b$，$b=1$，$c=2$

$$\sqrt{(c+a)-(a+b)\sqrt{ac}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$

2. 如圖，在半徑為 1 的圓 O 中內接有銳角三角形 ABC，H 是$\triangle ABC$ 的垂心，角平分線 $\overline{AL}$ 垂直於 $\overline{OH}$ ，求 $\overline{BC}$ 長=?



<解析>

圓心 O 及垂心 H 都在銳角三角形 ABC 的內部

延長 $\overline{AO}$ 交圓於 N

連接 $\overline{AH}$ 並延長至 H_1 與 $\overline{BC}$ 相交

連接 $\overline{CN}$ ，在 $Rt\triangle CAN$ 和 $Rt\triangle AH_1B$ 中

$\angle ANC = \angle ABC$

$\therefore \angle CAN = \angle BAH_1$ 且 $\overline{AL}$ 是△ABC 的角平分線

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ 且 $\overline{AP} \perp \overline{OH}$ ，得 $\overline{AH} = \overline{AO} = 1$

連接 $\overline{BO}$ 交圓於 M ，連接 $\overline{AM}$ 、$\overline{CM}$ 、$\overline{CH}$

得知 $AMCH$ 為平行四邊形

$\therefore \overline{CM} = \overline{AH} = \overline{AO} = 1$ ，$\overline{BM} = 2$

$\therefore \overline{BC} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$