2020 第十六屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)
2020 Sixteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

高中一年級試卷

考試時間：90 分鐘　卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

2020 第十六屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)

2020 Sixteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

(C)1. a 是實數，a 的小數部分是 b，且 $a^2+b^2=22$，則 $a=$?

(A) $2+\sqrt{5}$ (B) $2+\sqrt{6}$ (C) $2+\sqrt{7}$ (D) $2+\sqrt{8}$

〈解析〉

$\because b$ 是 a 小數部分 ➔ $0<b<1$，$0<b^2<1$

且 $a^2+b^2=22$ ……①

$\therefore 21<a^2<22$，a 的整數部分是 4

$\therefore a=4+b$，$b=a-4$ 代入①

$a^2+(a-4)^2=22$

得 $a=2\pm\sqrt{7}$ (取正)，選 C。

(D)2. 已知三次多項式 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足 $P(0)=0$，$P(1)=\frac{1}{2}$，$P(2)=\frac{2}{3}$，$P(3)=\frac{3}{4}$，則 $P(4)=($　　　$)$。

(A)0 (B)$\frac{1}{2}$ (C)$\frac{4}{5}$ (D)1

〈解析〉

利用插值多項式可得

$$P(x)=P(0)\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}+P(1)\cdot\frac{x(x-2)(x-3)}{1(1-2)(1-3)}+P(2)\cdot\frac{x(x-1)(x-3)}{2(2-1)(2-3)}$$

$+P(3)\cdot\dfrac{x(x-1)(x-2)}{3(3-1)(3-2)}$，令 $x=4$ 代入，得解 $P(4)=1$。

(D)3. 設 x 、 y 為實數，若 $2^x=9$ ， $3^y=16$ ，則 $xy=?$
(A)2 (B)4 (C)6 (D)8

<解析>

$\because 2^x=3^2$ ， $3^y=2^4$

$\therefore 2=3^{\frac{2}{x}}$ ， $3^{\frac{y}{4}}=2$

$\therefore 3^{\frac{y}{4}}=2=3^{\frac{2}{x}} \Rightarrow \frac{y}{4}=\frac{2}{x}$ ， $xy=8$ ，選 D。

(B)4. 已知 x、y、z 均為大於 1 的正實數，且滿足 $2\log_2 x=3\log_3 y=5\log_5 z$，則 (A) $x<y<z$ (B) $z<x<y$ (C) $y<z<x$ (D) $y<x<z$

<解析>

令 $t=2\log_2 x=3\log_3 y=5\log_5 z$ ， $t>0$ ， $x=(\sqrt{2})^t$ 、 $y=(\sqrt[3]{3})^t$ 、 $z=(\sqrt[5]{5})^t$

$\therefore (\sqrt{2})^6=8<(\sqrt[3]{3})^6=9$ ， $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ ； $(\sqrt{2})^{10}=32>(\sqrt[5]{5})^{10}=25$ ， $\sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$

$\therefore \sqrt[3]{3}>\sqrt{2}>\sqrt[5]{5} \Rightarrow y>x>z$ ，選 B。

(C)5. 甲、乙、丙、丁四位同學參加數學競賽挑戰賽，最終評出第一、第二、第三和第四名。
甲同學說: 我是第二名，乙是第三名
乙同學說: 我是第四名，丙是第二名
丙同學說: 我是第三名，丁是第二名
丁同學說: 我是第一名，乙是第三名
已知四位同學每人都說對一半說錯一半，那麼丙是( )。
(A)第一名 (B)第二名 (C)第三名 (D)第四名

<解析>

先決定名次:
如果甲是第二名，乙就不是第三名
丙是第三名，丁就不是第二名
丁是第一名，乙就不是第三名
故正確名次依序丁、甲、丙、乙
∴丙是第三名，選 C。

(B)6. $(1+\cos\frac{\pi}{5})(1-\cos\frac{2\pi}{5})$ 的值為( )。

(A) $1+\frac{1}{\sqrt{5}}$ (B) $1+\frac{1}{4}$ (C) $1+\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $1+\frac{1}{2}$

〈解析〉

$$(1+\cos\frac{\pi}{5})(1-\cos\frac{2\pi}{5})=1+\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$=1+2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=1+\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$=1+\frac{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=1+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{5}{4}$$，選 B。

令 $\frac{\pi}{10}=\theta$，$\frac{3\pi}{10}=3\theta$

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\cos(3\theta-\theta)-\cos(3\theta+\theta)=2\sin\theta\sin 3\theta=2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$$

(D)7. 設函數 $f(x)=\begin{cases}x^2+bx+c & x\le 0\\ 3 & x>0\end{cases}$，若 $f(-6)=f(0)$，$f(-3)=-3$，則關於 x 的方程 $f(x)=x$ 的解的個數為( )。

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

〈解析〉

$f(0)=0+0+c=c$，$f(-6)=36-6b+c$

$\therefore c=36-6b+c \Rightarrow b=6$

$f(-3)=9-18+c=-3$，$c=6$

故 $f(x)=x^2+6x+6$，$f(-a)=(-a)^2+6(-a)+6=-a$

$a=3$ 或 $a=2$

$\therefore f(3)=3$，$f(-3)=-3$，$f(-2)=-2$，共 3 個，選 D。

(A)8. 函數 $f(x)=3^{x+1}-4\cdot 9^{x}$，已知 $x^2+x\le 0$，則 $f(x)$ 的最小值是(　　)。

(A) -1　(B) 0　(C)-$\frac{1}{2}$　(D) -2

<解析>

$\because x^2+x\le 0$，$(x+1)\cdot x\le 0$，$(x+1)\cdot x\le 0$，$-1\le x\le 0$

當 $x=0$，$f(0)=3^{1}-4\cdot 9^{0}=3-4=-1$

當 $x=-1$，$f(-1)=3^{0}-4\cdot 9^{-1}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

故最小值=-1，選 A。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. Point $P(1, -2)$ has a symmetry point Q across $x+y-3=0$. What is the coordinate of point Q? ________.

<翻譯>$P(1, -2)$關於 $x+y-3=0$ 的對稱點 Q 坐標為________。

<解析>

$\because y=-x+3$，利用點斜式 $y=x+b$ 且通過 $P(1, -2)$

$\therefore -2=1+b$，$b=-3$，故 $y=x-3$

$y=x-3$ 與 $x+y-3=0$ 之交點 M（3, 0）

假設 Q（m, n）

$\frac{m+1}{2}=3$，$m=5$；$\frac{n-2}{2}=0$，$n=2$，Q 坐標為(5, 2)

2.若正整數n使得$n[2020\sqrt{2017^2+1}]=2020[n\sqrt{2017^2+1}]$成立，則符合要求的$n$共________個。($[x]$=不大於$x$的最大整數)

<解析>

$$2020\times2017<2020\sqrt{2017^2+1}<2020\times\sqrt{(2017+\frac{1}{2\times2017})^2}<2020\times2017+1$$

$\therefore[2020\sqrt{2017^2+1}]=2020\times2017$

原式$=2020\times2017\times n=2020[n\sqrt{2017^2+1}]\rightarrow 2017n=[n\sqrt{2017^2+1}]$

$\therefore 2017n\le n\sqrt{2017^2+1}<2017n+1\rightarrow n^2\cdot(2017^2+1)<(2017n+1)^2$

$n^2 2017^2+n^2<2017^2n^2+4034n+1$

故$n(n-4034)<1$，$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\cdots\cdots,\ 4034$ 共 4034 個整數解

3.試求過三點$(-3,\ 7)$，$(4,\ 6)$，$(3,\ -1)$的圓的方程式為________。

<解析>

假設圓方程式為$x^2+y^2+dx+ey+f=0$

$-3d+7e+f+58=0$

$4d+6e+f+52=0$

$3d-e+f+10=0$

得$d=0$，$e=-6$，$f=-16$

$\therefore x^2+y^2-6y-16=0$

4.已知正實數x、y滿足$2x^2-xy-y^2=2019$，則$2x-y$的最小值為________。

<解析>

$2x^2-xy-y^2=2019\rightarrow(2x+y)(x-y)=2019$，

令$2x+y=m$，$x-y=n$，則m、$n>0$且$mn=2019$

得解$\begin{cases}x=\dfrac{m+n}{3}\\ y=\dfrac{m-2n}{3}\end{cases}$，$\therefore 2x-y=\dfrac{m+4n}{3}\ge\dfrac{2\sqrt{4mn}}{3}=\dfrac{4\sqrt{2019}}{3}$

5. 工廠生產汽車零件 2024 個，需要 10 天完成，第三天開始，每天都比前一天的產量多，且已知第一天產量不少於 30 個，第三天的產量是第一天和第二天產量之和，之後的每一天都是前兩天的產量之和，問第三天的產量是____個。

<解析>

$\because a_1 \geq 30$

$\therefore a_3 = a_1 + a_2$，$a_4 = a_2 + a_3$，.....，$a_{10} = a_8 + a_9$

$\therefore S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{10} = (1+1+1+2+3+5+8+13+21)a_1 +$
$(1+1+2+3+5+8+13+21+34)a_2$

$\therefore 55a_1 + 88a_2 = 2024 \Rightarrow 5a_1 + 8a_2 = 184$，$a_1 = 32$，$a_2 = 3$

故 $a_3 = 32 + 3 = 35$ (本題送分)

6. 二次函數 $y = ax^2 + 12x + b$，當 $x = -2$ 時，y 有最小值 -5，則 $ab =$______。

<解析>

假設 $y = a(x+2)^2 - 5 \Rightarrow y = ax^2 + 4ax + 4a - 5$ 與 $y = ax^2 + 12x + b$

對應係數 $4a = 12$，$a = 3$，$b = 3 \times 4 - 5 = 7$

故 $ab = 3 \times 7 = 21$

7. 從自然數 1 到 2020 這 2020 個數字中，既不能被 2 整除，又不能被 3 整除，也不能被 5 整除的數共有______個。

<解析>

2020÷2=1010，2020÷3=673….1，2020÷5=404

2020÷6=336….4，2020÷10=202，2020÷15=134….10

2020÷30=67…..10

2020-1010-673-404+336+202+134-67=538

8. If k is a real number. The diagram of $y=kx^2+k$ is underneath the diagram of $y=-x$. What is the range of k? ________ .

<翻譯>設 k 為實數，$y=kx^2+k$ 之圖形在 $y=-x$ 圖形下方，則 k 的範圍為________。

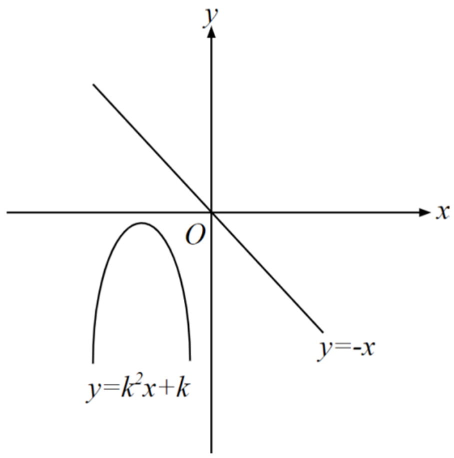
<解析>

$\because -x>kx^2+k$ 恆成立

$\therefore kx^2+x+k<0$ 恆真

$\therefore \begin{cases} k<0 \\ D=1-4k^2<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k<0 \\ (2k+1)(2k-1)>0 \end{cases}$

$\therefore k<-\dfrac{1}{2}$ 為所求



三、計算題(10 分/10 分，共 20 分）※未寫計算過程不予計分

1. There are two circles inscribed at point K. The chord of big circle $\overline{AB}$ cut with small circle at point L. $\overline{AL}=10$, and $\dfrac{\overline{AK}}{\overline{BK}}=\dfrac{2}{5}$. What is the length of $\overline{BL}$?

<翻譯>兩圓內切於點 K，大圓的弦 $\overline{AB}$ 與小圓切於 L，且 $\overline{AL}=10$，若 $\dfrac{\overline{AK}}{\overline{BK}}=\dfrac{2}{5}$，求 $\overline{BL}=$?

<解析>

如圖，作弦 $\overline{PQ}$ 及公切線 $\overline{MN}$

則 $\angle PQK=\angle PKM=\angle ABK$

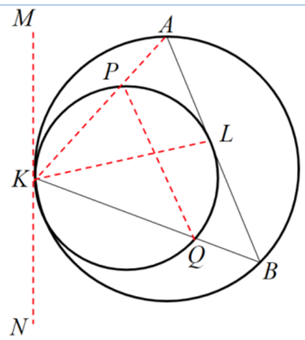
$\therefore \overline{PQ}//\overline{AB}$

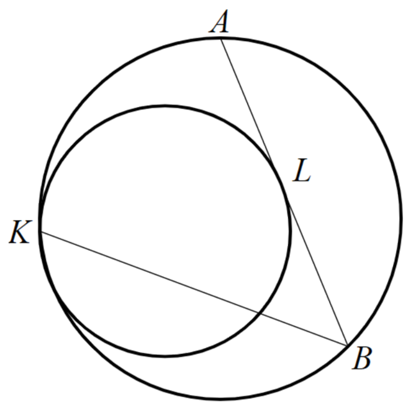
$\overset{\frown}{PL}=\overset{\frown}{QL}$

$\therefore \angle PKL=\angle QKL$ 即 $\overline{KL}$ 是 $\angle AKB$ 的角平分線

由角平分線性質得知

$\dfrac{\overline{AL}}{\overline{BL}}=\dfrac{\overline{AK}}{\overline{BK}}=\dfrac{2}{5} \rightarrow \overline{BL}=10\times\dfrac{5}{2}=25$





2. 如果a、b、c都是整數，且$a^2+3b^2+3c^2+13<2ab+4b+12c$，求 $\sqrt{(c+a)-(a+b)\sqrt{ac}}$ 的值?

<解析>

原式$=(a^2-2ab+b^2)+2(b^2-2b+1)+3(c^2-4c+4)<1$

$\therefore (a-b)^2+2(b-1)^2+3(c-2)^2=0$，$\therefore a=b$，$b=1$，$c=2$

$\sqrt{(c+a)-(a+b)\sqrt{ac}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$