第十八屆IMC國際數學競賽初賽(台灣區)

Eighteenth IMC International Mathematics Preliminary Contest (Taiwan)

高中二年級(初賽)試卷

考試時間: 60 分鐘　　卷面總分:300 分　　得分:______________

一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

1. 甲、乙、丙、丁、戊、己 6 人排成一列，若規定甲必須在乙的左邊，乙在丙的左邊，丁在丙的左邊，其排列數共有多少個? (A)80 (B)90 (C)100 (D)110

<解析>

甲乙丙丁 4 人位置如下：

甲乙丁丙戊己

甲丁乙丙戊己

丁甲乙丙戊己

視為同物→$\frac{6!}{4!}\times 3=90$，選 B。

2. 若 $0°\le\theta\le 180°$，且 $\sin 2004°=\cos\theta$，則 θ ＝(A)104° (B)114° (C)124° (D)134°

<解析>

$$\begin{aligned}\sin 2004° &= \sin(360°\times 5+204°)\\ &= \sin 204° = \sin(270°-66°)\\ &= -\cos 66° = \cos(180°-66°) = \cos 114°\end{aligned}$$

，選 B。

3. 設 $S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+......+\frac{10}{2^{10}}$，下列哪一個數和 S 最為接近? (A)1.5 (B)1.8 (C)2.1 (D)2.4

<解析>

$$2S=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+......+\frac{10}{2^9}$$

$$-)\quad S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+......+\frac{10}{2^{10}}$$

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+......+\frac{1}{2^9}-\frac{10}{2^{10}}$$

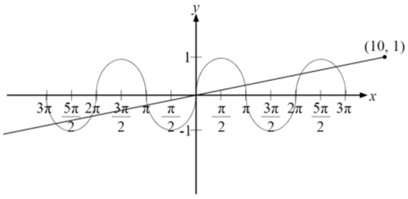
$$=\frac{1[1-(\frac{1}{2})^{10}]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{10}{2^{10}}=2-\frac{1}{2^9}-\frac{10}{2^{10}}$$

則 $1.98<2-\frac{1}{2^9}-\frac{10}{2^{10}}<2$→和 S 最接近的數是 2.1，選 C。

4. 求方程式 $\sin x = \frac{x}{10}$ 解的個數共有多少個? (A)5 (B)6 (C)7 (D)8

<解析>

作 $y = \sin x$ 與 $y = \frac{x}{10}$ 的圖形



共有 3×2+1=7 個，選 C。

5. On the coordinate plane, the symmetry point of point A (1, 2) to line L is B(5, 4). What is the equation of the line L? (A) $2x+y=3$ (B) $2x+y=6$ (C) $2x+y=9$ (D) $2x+y=12$

<解析>

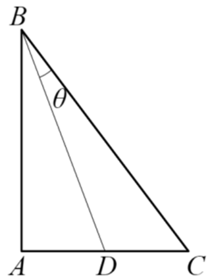
假設 $y=ax+b$，代入(1, 2)、(5, 4)

$\begin{cases} 2=a+b \\ 4=5a+b \end{cases} \Rightarrow 2=4a$，$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$

故直線方程式 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 與直線 L 垂直，直線 L: $y=-2x+c$

且通過中點(3, 3)，則 $3=-6+c$，$c=9$，直線 L: $y=-2x+9$，選 C。

6. 右圖中，△ABC 為一直角三角形，且 $2\overline{AB}=3\overline{AC}$，$\overline{AD}=\overline{DC}$，$\angle DBC=\theta$，則 $\tan\theta=$? (A) $\frac{3}{11}$ (B) $\frac{5}{11}$ (C) $\frac{7}{11}$ (D) $\frac{9}{11}$



<解析>

令 $\angle ABC=\alpha$，$\angle ABD=\beta \rightarrow \theta=\alpha-\beta$

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{3}{11}$，選 A。

7. 利用 1、2、3、4 這四張數字卡排成三位數，排出的三位數是 11 的倍數的機率是多少? (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{2}$

<解析>

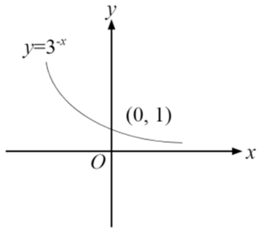
四張卡片任意排三位數:4×3×2=24

11 的倍數: 341、143、231、132

故機率 $=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$，選 C。

8. 設 $f(x)=(\frac{1}{3})^x$，則下列那些選項是正確的? (A)若 $x>0$，則 $f(x)>1$ (B)若 $x<0$，則 $f(x)<1$
(C) $f(108)>f(109)$ (D) $f(100)\cdot f(200)=f(-300)$

<解析>



圖示 $y=f(x)=(\frac{1}{3})^x=3^{-x}$

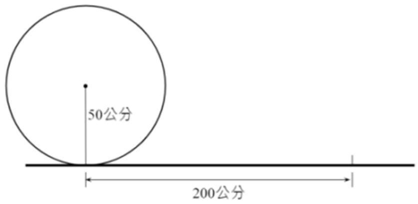
(1) 若 $x>0$，則 $f(x)<1\rightarrow$不合

(2) 若 $x<0$，則 $f(x)>1\rightarrow$不合

(3) $y=f(x)=(\frac{1}{3})^x=3^{-x}$ 為遞減函數，則 $f(108)>f(109)\rightarrow$正確

(4) $f(100)\cdot f(200)=3^{-100}\cdot 3^{-200}=3^{-300}=f(300)\rightarrow$不合，選 C。

9. 一個輪子半徑 50 公分，讓它在地上滾動 200 公分長度，問輪子繞軸轉動多少度? (度以下四捨五入)
(A) 189° (B) 209° (C) 229° (D) 249°



<解析>

$S=r\theta\rightarrow 200=50\times\theta$

$\therefore \theta=4$ 弳 $=4\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{720^\circ}{\pi}\fallingdotseq 229^\circ$，選 C。

10. There are two boxes A and B. There are one white ball and one black ball in box A. There are one white ball in box B. Peter and May take turns to draw the ball. Every time Peter draws a ball from box A and then puts it in box B. Then May takes out a ball from box B and puts it in box A. After they complete a round for the first time, what is the probability that there is a black ball and a white ball in box A? (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$

<解析>

A 箱子內為一黑一白之機率=P(白去白回)+P(黑去黑回)= $\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，選 C。

11. 求 $\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$=? (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

<解析>

令 $k=\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$

$(2^3\sin 20^\circ)k=2^3\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$

$=2^2\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=2\sin 80^\circ\cdot\cos 80^\circ=\sin 160^\circ$

$\therefore (2^3\sin 20^\circ)k=\sin 160^\circ=\sin(180^\circ-20^\circ)=\sin 20^\circ\rightarrow k=\frac{1}{8}$，選 B。

12. 方程式$\frac{x+3}{3-x}+\frac{x+6}{6-x}+\frac{x+9}{9-x}=3$，解出的根最大是下列哪個?

(A)$2+\sqrt{3}$ (B)$4+\sqrt{3}$ (C)$6+\sqrt{3}$ (D)$8+\sqrt{3}$

<解析>

$$(\frac{x+3}{3-x}-1)+(\frac{x+6}{6-x}-1)+(\frac{x+9}{9-x}-1)=0$$

$$\frac{2x}{3-x}+\frac{2x}{6-x}+\frac{2x}{9-x}=0$$

$$2x(\frac{1}{3-x}+\frac{1}{6-x}+\frac{1}{9-x})=0$$

$$2x[(6-x)(9-x)+(3-x)(9-x)+(3-x)(6-x)]=0$$

$$2x(x^2-12x+33)=0$$

$\therefore x=0$ 或 $x=6\pm\sqrt{3}$，最大根式=$x=6+\sqrt{3}$，選 C。

13. 設某物質原質量為x，半衰期間為T，若經過時間k後，剩下的質量為y，則$y=x\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{k}{T}}$。已知甲放射性物質的半衰期為 6 天，現有甲放射性物質 1024 公克，則經過幾天後，此放射物質會剩下 16 克? (A)24 (B)36 (C)48 (D)60

<解析>

$16=1024\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{k}{6}}\rightarrow\frac{16}{1024}=(\frac{1}{2})^{\frac{k}{6}}$，$\frac{2^4}{2^{10}}=(\frac{1}{2})^{\frac{k}{6}}$

$\therefore(\frac{1}{2})^6=(\frac{1}{2})^{\frac{k}{6}}$，$6=\frac{k}{6}$，$k=36$，選 B。

14. 求$y=\cos^2 x-\sin 2x$的最大值是多少? (A) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

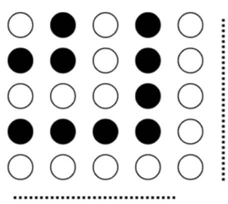
<解析>

$$y=\cos^2 x-\sin 2x=\frac{1+\cos 2x}{2}-\sin 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x-\sin 2x$$

$$\because -\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-1)^2}\le\frac{1}{2}\cos 2x-\sin 2x\le\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-1)^2}$$

$\therefore -\frac{\sqrt{5}}{2}\le\frac{1}{2}\cos 2x-\sin 2x\le\frac{\sqrt{5}}{2}\rightarrow M=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$，選 A。

15. Arrange the black and white chess pieces in the pattern on the right. When there are 12 pieces on each side, how many more black chess pieces than the white chess pieces? (A)9 (B)10 (C)11 (D)12



<解析>

白色=1+5+9+13+17+21

黑色=3+7+11+15+19+23

相差=(3-1)+(7-5)+(11-9)+(15-13)+(19-17)+(23-21)=12，選 D。

16. 設$a>0$，$b>0$且$2a+3b=4$，則$(a+3)(b+2)$之最大值為? (A) $\frac{32}{3}$ (B) $\frac{64}{3}$ (C) $\frac{16}{3}$ (D) $\frac{48}{3}$

<解析>

$(a+3)(b+2)=ab+3b+2a+6$

$\frac{2a+3b}{2}\geq\sqrt{2a\cdot 3b}\rightarrow 2^2\geq 6ab$，$ab\leq\frac{2}{3}$，當$2a=3b$，$ab$有最大值$\frac{2}{3}$

$\therefore(a+3)(b+2)=ab+3b+2a+6=\frac{2}{3}+4+6=10\frac{2}{3}$，選 A。

17. 試求$1!\times1+2!\times2+3!\times3+.....+90!\times90+91!\times91$除以 2002 之餘數是多少? (A)1 (B)2 (C)2000 (D)2001

<解析>

$2!\times2=2!(3-1)=3!-2!$

$3!\times3=3!(4-1)=4!-3!$

$4!\times4=4!(5-1)=5!-4!$

....

$1!\times1+(3!-2!)+(4!-3!)+.....+(91!-90!)+(92!-91!)=92!-1$

2002=2×11×91

故$2002\,|\,92!$

∴餘數是 2001，選 D。

18. 設a、b為一元二次方程式$x^2+7x+5=0$之二根，則$(a^2+6a+9)(b^2+6b+9)$=? (A)25 (B)49 (C)30 (D)45

<解析>

$a+b=-7$，$a\times b=5$

且$a^2+7a+5=0$、$b^2+7b+5=0$

$\therefore(a^2+6a+9)(b^2+6b+9)=[(a^2+7a+5)-a+4][(b^2+7b+5)-b+4]=(-a+4)(-b+4)$

$=(-a+4)(-b+4)=ab-4(a+b)+16=5-4\times(-7)+16=49$，選 B。

19. 方程式$2^{2x}-7\cdot2^x-8=0$，則x之值是多少? (A)1 (B)2 (C)3 (D)4

<解析>

令$2^x=a$

原式$=a^2-7a-8=0\rightarrow(a-8)(a+1)=0$

$\therefore a=8$或$a=-1$

當$a=8$，$2^x=8$，$x=3$

當$a=-1$，$2^x=-1$(無解)，選 C。

20. It is known that the graph of the linear function f(x) passes through two points (-1, 4) and (17,-5). Then $\frac{f(-2020)-f(2021)}{-2020-2021}$=? (A) $-\frac{1}{2}$ (B) -2 (C) -1 (D) $-\frac{2}{3}$

<解析>

斜率$=\frac{f(-2020)-f(2021)}{-2020-2021}=\frac{4-(-5)}{-1-17}=-\frac{1}{2}$，選 A。

21. 已知$\log(5x)\log(ax)=1$之兩根乘積為$\frac{1}{36}$，則a之值是多少? (A)$\frac{18}{5}$ (B)$\frac{18}{25}$ (C)$\frac{36}{25}$ (D)$\frac{36}{5}$

<解析>

令 $\log(5x)\log(ax)=1$ 之兩根為α、β，則$\alpha\beta=\frac{1}{36}$

令 $t=\log x$

原式$=(t+\log 5)(t+\log a)=1$ 之兩根

$\therefore t=\log\alpha$ 或 $t=\log\beta$

$\rightarrow t^2+(\log 5a)t+(\log 5\cdot\log a)-1=0$ 之兩根 $\log\alpha$、$\log\beta$

$\rightarrow \log\alpha+\log\beta=-\log 5a$

$\therefore \log\alpha\beta=\log\frac{1}{5a}\rightarrow\alpha\beta=\frac{1}{5a}$，$\frac{1}{5a}=\frac{1}{36}$，$a=\frac{36}{5}$，選 D。

22. 設x為實數，一鈍角三角形的三邊長為x、$x-1$、$x-2$，則x的範圍是多少? (A) $1<x<3$ (B) $1<x<5$ (C) $2<x<5$ (D) $3<x<5$

<解析>

兩邊和必大於第三邊

$\therefore x-1+x-2>x\rightarrow x>3$ ......①

且鈍角三角形

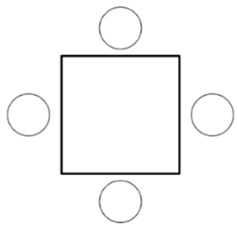
$(x-1)^2+(x-2)^2<x^2$

$x^2-6x+5<0\rightarrow(x-5)(x-1)<0$

$\therefore 1<x<5$ ......②

由①②: $3<x<5$，選 D。

23. 佩佩一家四口到餐廳用餐，其餐桌座位如右圖所示，若四人隨機入座，則佩佩坐在媽媽對面的機率是多少? (A)$\frac{1}{6}$ (B)$\frac{1}{4}$ (C)$\frac{1}{3}$ (D)$\frac{1}{2}$



<解析>

四個座位 A、B、C、D

若 A 座位對面 C 座位；B 座位對面 D 座位

先選座位: 4×2×1×1=8

任意坐: 4×3×2×1=24

坐對面的機率$=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$，選 C

<另解>

媽媽坐定位置後，佩佩有 3 種選擇，只有一種選擇會坐到媽媽的對面

故機率$=\frac{1}{3}$

24. 阿彬到市場買水果，其身上帶錢可以買 12 個柳丁或 28 個蘋果或 42 個奇異果，如今三種水果都買，每種數量都相等，問他應該各買幾個? (A)9 (B)10 (C)7 (D)8

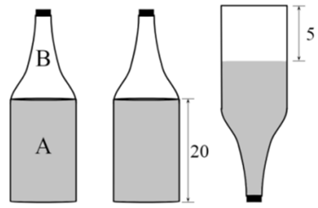
<解析>

12×△=28×□=42×☆且[12,28,42]=84

△=7，□=3，□=2

則 84÷(7+3+2)=7，各買 7 個，選 C。

25. A bottle of beverage has two parts A and B. Part A is a cylinder, as shown in the picture. Now the bottle contains some drinks. The height of the beverage is 20 cm when placed. The height of the remaining part is 5 cm when it is reversed. If the volume of the beverage bottle is 30000 cm^3. What is the volume of the existing beverage in the bottle? (A)20000 (B)22000 (C)24000 (D)26000

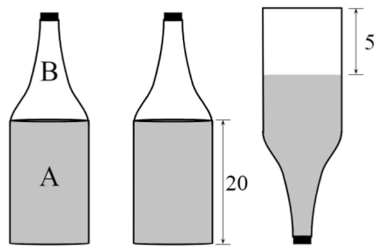


<解析>

假設 A 部分的底面積=$x\ cm^2$→A 體積 $20x\ cm^3$，B 體積 $5x\ cm^3$

$20x+5x=30000$ ，$x=1200$

則 1200×20=24000，選 C。



二、計算題(每題 25 分，共 50 分，請寫出簡要過程，可得過程分)

1. △ABC 中，$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 邊上的高的比為 21：15：35，試求:
(1) $\sin A:\sin B:\sin C=?$ (2) △ABC 中最大的角為多少度? (3)若△ABC 的周長為 30，則其外接圓面積為多少?

<解析>

(1)令 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的邊為 a、b、c

同一個三角形，邊長與高成反比

$\therefore a：b：c=\frac{1}{21}：\frac{1}{15}：\frac{1}{35}=5：7：3$

根據正弦定理: $\sin A:\sin B:\sin C=5:7:3$

(2)由(1)令 $a=5$、$b=7$、$c=3$

根據餘弦定理: $7^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\cos B$ ，$\cos B=-\frac{1}{2}$

$\therefore \angle B=120°$

(3) $b=\frac{7}{5+7+3}\times30=14$ ，正弦定理: $\frac{14}{\sin120°}=2R\rightarrow R=\frac{14}{\sqrt{3}}$

$\therefore$外接圓面積$=R^2\pi=(\frac{14}{\sqrt{3}})^2\pi=\frac{196}{3}\pi$

2. 已知$x=\sqrt[3]{10+y\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-y\sqrt{3}}$且$x$滿足方程式$x^3+6x-20=0$，求$y$的值=?

<解析>

令$\begin{cases} u=10+y\sqrt{3} \\ v=10-y\sqrt{3} \end{cases}$ ➔ $x=u^{\frac{1}{3}}+v^{\frac{1}{3}}$，$\begin{cases} u+v=20 \\ u\cdot v=100-3y^2 \end{cases}$

$x^3=(u^{\frac{1}{3}}+v^{\frac{1}{3}})^3=(u^{\frac{1}{3}})^3+(v^{\frac{1}{3}})^3+3u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}(v^{\frac{1}{3}}+u^{\frac{1}{3}})$

$\therefore x^3=u+v+3(uv)^{\frac{1}{3}}x \rightarrow x^3=20+3(uv)^{\frac{1}{3}}x$ 且 $x^3=20-6x$

$\therefore 3(uv)^{\frac{1}{3}}=-6 \rightarrow (uv)^{\frac{1}{3}}=-2 \rightarrow uv=-8$

$(10+y\sqrt{3})(10-y\sqrt{3})=-8$

$10^2-3y^2=-8$

$-3y^2=-108$

$\therefore y^2=36$，$y=\pm 6$