第十八屆IMC國際數學競賽初賽(台灣區)
Eighteenth IMC International Mathematics Preliminary Contest (Taiwan)

高中一年級(初賽)試卷

考試時間: 60 分鐘　卷面總分:300 分　得分:________________

一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

1. 若 $\frac{k}{6}<\sqrt{21}<\frac{k+1}{6}$，$k$ 為整數，k=? (A)24 (B)25 (C)26 (D)27

<解析>

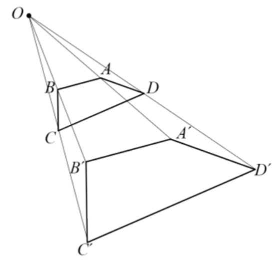
$\because k<6\sqrt{21}<k+1$

$\therefore k<\sqrt{756}<k+1$

$27^2=729$，$28^2=784$

$\therefore \sqrt{729}<\sqrt{756}<\sqrt{784} \to 27<\sqrt{756}<28$，$k=27$，選 D。

2. 如圖，以 O 為中心，四邊形 ABCD~四邊形 A'B'C'D'，若 $\overline{OA}$：$\overline{AA'}$ =2：3，且 A'B'C'D' 面積為 100 平方公分，則 ABCD 面積為多少平方公分? (A)16　(B)18　(C)20　(D)24



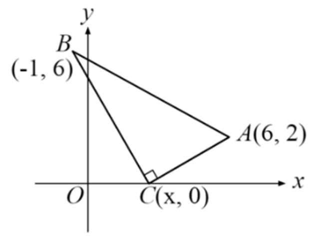
<解析>

$\overline{OA}$：$\overline{OA'}$=2：5

四邊形 ABCD：四邊形 A'B'C'D'=4：25

x：100=4：25→ $x=16$，選 A。

3. 設 A(6, 2)，B(-1, 6)，C 為 x 軸上一點，若 $\angle ACB=90°$，則 C 點坐標可為下列哪一個? (A)(1, 0)　(B)(3,0)　(C)(5, 0)　(D)(7, 0)



<解析>

分別作垂線 $\overline{BO}$、$\overline{AD}$ 且 $D(6, 0)$、$O(-1, 0)$

△COB~△ADC

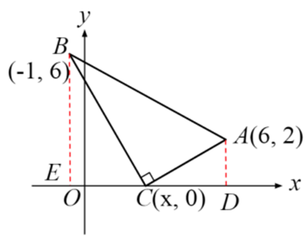
$\frac{\overline{CO}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{x+1}{6}=\frac{2}{6-x}$

$\therefore (x+1)(6-x)=12$

$\therefore 6x+6-x^2-x=12$，$x^2-5x+6=0$

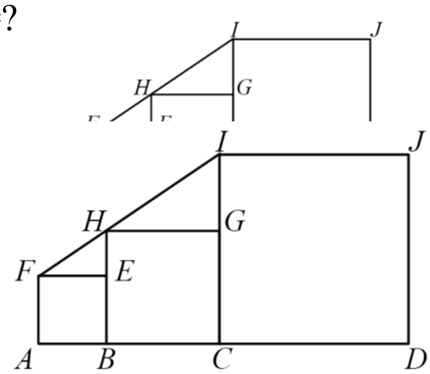
$\therefore (x-3)(x-2)=0 \to x=2$ 或 $x=3$

則 C 點坐標為(2, 0)或(3, 0)，選 B。



4. 右圖中的三個四邊形均為正方形，若$\overline{AB}=3$，$\overline{CD}=6$，則$\overline{BC}=?$

(A)$\sqrt{14}$ (B)$\sqrt{15}$ (C)$\sqrt{16}$ (D)$\sqrt{18}$



<解析>

$\triangle FEH \sim \triangle HGI$

假設$\overline{BC}=x$

$$\frac{x-3}{3}=\frac{6-x}{x}$$

$\therefore (x-3)x=3(6-x)$

$\therefore x^2-3x=18-3x \rightarrow x^2=18$，$x=\pm\sqrt{18}$ (取正)，選 D。

5. Use the three digital cards of 1, 2, 3 to form three-digit. What is the probability that three-digit is multiples of 11? (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{2}$

<解析>

全部情況=3×2×1=6

要符合 11 的倍數: 132、231，共 2 種

故機率=$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，選 A。

6. 坐標平面上，點 A(1, 2)對直線 L 的對稱點為 B(5, 4)，則 L 的方程式為? (A)$2x+y=3$ (B)$2x+y=6$ (C)$2x+y=9$ (D)$2x+y=12$

<解析>

假設$y=ax+b$，代入(1, 2)、(5, 4)

$$\begin{cases} 2=a+b \\ 4=5a+b \end{cases} \rightarrow 2=4a，a=\frac{1}{2}，b=\frac{3}{2}$$

故直線方程式 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 與直線 L 垂直，直線 L: $y=-2x+c$

且通過中點(3, 3)，則$3=-6+c$，$c=9$，直線 L: $y=-2x+9$，選 C。

7. 若三角形三個頂點分別是(2, -1)、(4, -1)、(4, -9)，則此三角形的外心坐標為何?

(A)(3, -5) (B)(2, -3) (C)(5, -5) (D)(3, 4)

<解析>

此三角形為直角三角形

故外心坐標為斜邊之中點

故坐標=($\frac{2+4}{2}$, $\frac{(-1)+(-9)}{2}$)=(3, -5)，選 A。

8. 設$x+\frac{1}{x}=8$，則$x^3+\frac{1}{x^3}=?$ (A)244 (B)488 (C)222 (D)444

<解析>

$$(x+\frac{1}{x})^3=x^3+3\cdot x^2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot x\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x^3}+3(x+\frac{1}{x})$$

$\therefore 8^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\times 8 \rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=488$，選 B。

9. 有五位學生，他們的體重(單位為公斤)，分別如下: 44、74、39、42、61，今加入一位學生後，其算術平均數較原先的算術平均數減少 1 公斤，則這六位學生體重之中位數為多少公斤? (A)43 (B)44 (C)45 (D)46

<解析>

由小到大: 39、42、44、61、74

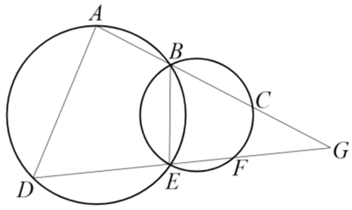
假設學生重量為 x 公斤

$$\frac{39+42+44+61+74}{5}=\frac{39+42+44+61+74+x}{6}+1$$

$\therefore 52=\dfrac{260+x}{6}+1$ ， $x=46$

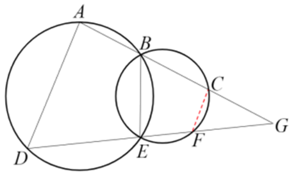
故中位數 $(44+46)\div 2=45$ ，選 C。

10. As shown on the right, the two circles intersect at B and E. If $\angle A=77°$, and $\angle G=33°$, then, $\angle CFG=$________.
(A) $40°$ (B) $50°$ (C) $60°$ (D) $70°$



<解析>

連接 $\overline{CF}$



$\because$ 四邊形 ABED、四邊形 BCFE 為圓內接四邊形

$\therefore \angle BED=180°-77°=103°$

$\therefore \angle BEF=180°-103°=77°$

$\therefore \angle BCF=180°-77°=103°$

$\therefore \angle CFG=103°-33°=70°$ ，選 D。

11. 設 a 、 b 為實數，且不等式 $|-2x+a|\le b$ 的解為 $-3\le x\le 5$ ，則(a， b)之值為?
(A)(2, 8) (B)(1, 4) (C)(4, 8) (D)(2, 4)

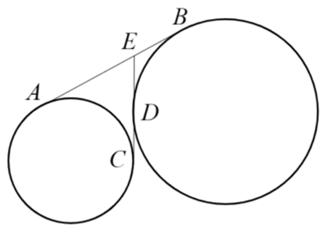
<解析>

$-3-1\le x-1\le 5-1$ ， $-4\le x-1\le 4$

$\therefore |x-1|\le 4$ ， $|-2x+2|\le 8$ ， $a=2$ ， $b=8$

(a， b)=(2, 8)，選 A。

12. 如右圖，兩圓的內公切線 $\overline{CE}$ 與外公切線 $\overline{AB}$ 交於 E 點，其中 A、C、D、B 是切點，若 $\overline{AB}=3\overline{BE}=6$ ，求 $\overline{CD}$=?
(A)1.5 (B)2 (C)2.5 (D)3



<解析>

假設 $\overline{CD}=x$

$\because \overline{AB}=6$ ， $\overline{BE}=\overline{DE}=2$

$\therefore \overline{AE}=6-2=4$ ， $\overline{AE}=\overline{ED}+\overline{CD}$

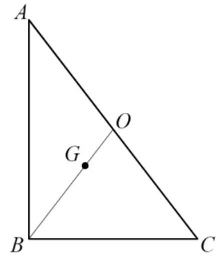
$\therefore 4=2+x$ ， $x=2$ ，選 B。

13. 設某物質原質量為x，半衰期間為T，若經過時間k後，剩下的質量為y，則$y=x\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{k}{T}}$。已知甲放射性物質的半衰期為 6 天，現有甲放射性物質 1024 公克，則經過幾天後，此放射物質會剩下 16 克? (A)24 (B)36 (C)48 (D)60

<解析>

$16=1024\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{k}{6}} \rightarrow \frac{16}{1024}=(\frac{1}{2})^{\frac{k}{6}}$，$\frac{2^4}{2^{10}}=(\frac{1}{2})^{\frac{k}{6}}$

$\therefore (\frac{1}{2})^6=(\frac{1}{2})^{\frac{k}{6}}$，$6=\frac{k}{6}$，$k=36$，選 B。



14. 如圖，直角△ABC 中，∠ABC=90°，O為外心，G為重心，若$\overline{OG}=10$，求$\overline{AC}$=? (A)60 (B)50 (C)40 (D)30

<解析>

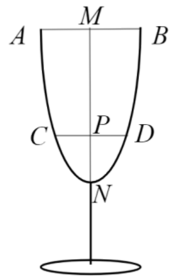
∵G 為重心

$\therefore \frac{\overline{OG}}{\overline{OB}}=\frac{1}{3}=\frac{10}{\overline{OB}}$，$\overline{OB}=30$

又O為外心

故$\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OA}$，$\overline{AC}=2\overline{OB}=30\times 2=60$，選 A。

15. There is a goblet as right graph. The shape curve of the goblet is a quadratic-function graph, $y=ax^2+bx+c$ .If N is the apex of the graph, and $\overline{AM}=\overline{BM}$. Fill it with water. If the water surface width $\overline{AB}$ is 10 cm and the water surface height $\overline{MN}$ is 10 cm. What is the water surface height $\overline{NP}$, if the water surface width $\overline{CD}$ is 2 cm? (A)0.4 (B)0.6 (C)0.75 (D)1



<解析>

假設 N(0, 0)，B(5, 10)

令拋物線方程式 $y=kx^2$

$\therefore 10=k\cdot 25$，$k=\frac{2}{5}$，方程式: $y=\frac{2}{5}x^2$

C(-1, y)，$y=\frac{2}{5}\times(-1)^2=\frac{2}{5}=0.4$，$\overline{NP}=0.4$，選 A。

16. 設$a>0$，$b>0$且$2a+3b=4$，則$(a+3)(b+2)$之最大值為? (A) $\frac{32}{3}$ (B) $\frac{64}{3}$ (C) $\frac{16}{3}$ (D) $\frac{48}{3}$

<解析>

$(a+3)(b+2)=ab+3b+2a+6$

$\frac{2a+3b}{2}\geq\sqrt{2a\cdot 3b} \rightarrow 2^2\geq 6ab$，$ab\leq\frac{2}{3}$，當$2a=3b$，$ab$有最大值$\frac{2}{3}$

$\therefore (a+3)(b+2)=ab+3b+2a+6=\frac{2}{3}+4+6=10\frac{2}{3}$，選 A。

17. 試求$1!\times1+2!\times2+3!\times3+\ldots\ldots+90!\times90+91!\times91$除以 2002 之餘數是多少? (A)1 (B)2 (C)2000 (D)2001

<解析>

$1!\times1+(3!-2!)+(4!-3!)+\ldots\ldots+(91!-90!)+(92!-91!)=92!-1$

2002=2×11×91

故 $2002\,|\,92!$

∴餘數是 2001，選 D。

18. 設a、b為一元二次方程式$x^2+7x+5=0$之二根，則$(a^2+6a+9)(b^2+6b+9)$=? (A)25 (B)49 (C)30 (D)45

<解析>

$a+b=-7$，$a\times b=5$

且$a^2+7a+5=0$、$b^2+7b+5=0$

∴$(a^2+6a+9)(b^2+6b+9)=[(a^2+7a+5)-a+4][(b^2+7b+5)-b+4]=(-a+4)(-b+4)$

$=(-a+4)(-b+4)=ab-4(a+b)+16=5-4\times(-7)+16=49$，選 B。

19. 方程式$2^{2x}-7\cdot2^x-8=0$，則x之值是多少? (A)1 (B)2 (C)3 (D)4

<解析>

令$2^x=a$

原式$=a^2-7a-8=0\rightarrow(a-8)(a+1)=0$

∴$a=8$或$a=-1$

當$a=8$，$2^x=8$，$x=3$

當$a=-1$，$2^x=-1$(無解)，選 C。

20. It is known that the graph of the linear function f(x) passes through two points (-1, 4) and (17,-5). Then $\dfrac{f(-2020)-f(2021)}{-2020-2021}$=? (A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) -2 (C) -1 (D) $-\dfrac{2}{3}$

<解析>

斜率$=\dfrac{f(-2020)-f(2021)}{-2020-2021}=\dfrac{4-(-5)}{-1-17}=-\dfrac{1}{2}$，選 A。

21. 已知$\log(5x)\log(ax)=1$之兩根乘積為$\dfrac{1}{36}$，則a之值是多少? (A)$\dfrac{18}{5}$ (B)$\dfrac{18}{25}$ (C)$\dfrac{36}{25}$ (D)$\dfrac{36}{5}$

<解析>

令$\log(5x)\log(ax)=1$之兩根為α、β，則$\alpha\beta=\dfrac{1}{36}$

令$t=\log x$

原式$=(t+\log5)(t+\log a)=1$之兩根

∴$t=\log\alpha$或$t=\log\beta$

$\rightarrow t^2+(\log5a)t+(\log5\cdot\log a)-1=0$之兩根$\log\alpha$、$\log\beta$

$\rightarrow\log\alpha+\log\beta=-\log5a$

∴$\log\alpha\beta=\log\dfrac{1}{5a}\rightarrow\alpha\beta=\dfrac{1}{5a}$，$\dfrac{1}{5a}=\dfrac{1}{36}$，$a=\dfrac{36}{5}$，選 D。

22. 設 x 為實數，一鈍角三角形的三邊長為 x、$x-1$、$x-2$，則 x 的範圍是多少? (A) $1<x<3$ (B) $1<x<5$ (C) $2<x<5$ (D) $3<x<5$

<解析>

兩邊和必大於第三邊

$\therefore x-1+x-2>x \rightarrow x>3$ ......①

且鈍角三角形

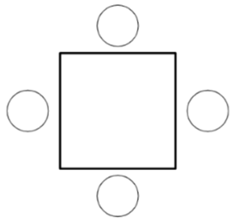
$(x-1)^2+(x-2)^2<x^2$

$x^2-6x+5<0 \rightarrow (x-5)(x-1)<0$

$\therefore 1<x<5$ ......②

由①②: $3<x<5$，選 D。

23. <u>佩佩</u>一家四口到餐廳用餐，其餐桌座位如右圖所示，若四人隨機入座，則<u>佩佩</u>坐在媽媽對面的機率是多少? (A)$\frac{1}{6}$ (B)$\frac{1}{4}$ (C)$\frac{1}{3}$ (D)$\frac{1}{2}$



<解析>

四個座位 A、B、C、D

若 A 座位對面 C 座位；B 座位對面 D 座位

先選座位: 4×2×1×1=8

任意坐: 4×3×2×1=24

坐對面的機率=$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$，選 C

<另解>

媽媽坐定位置後，<u>佩佩</u>有 3 種選擇，只有一種選擇會坐到媽媽的對面

故機率=$\frac{1}{3}$

24. <u>阿彬</u>到市場買水果，其身上帶錢可以買 12 個柳丁或 28 個蘋果或 42 個奇異果，如今三種水果都買，每種數量都相等，問他應該各買幾個? (A)9 (B)10 (C)7 (D)8

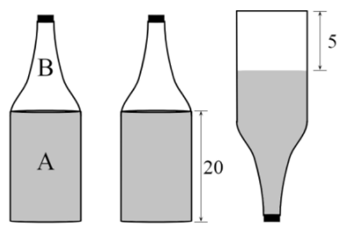
<解析>

12×△=28×□=42×☆且[12,28,42]=84

△=7，□=3，□=2

則 84÷(7+3+2)=7，各買 7 個，選 C。

25. A bottle of beverage has two parts A and B. Part A is a cylinder, as shown in the picture. Now the bottle contains some drinks. The height of the beverage is 20 cm when placed. The height of the remaining part is 5 cm when it is reversed. If the volume of the beverage bottle is 30000 cm^3. What is the volume of the existing beverage in the bottle? (A)20000 (B)22000 (C)24000 (D)26000



<解析>

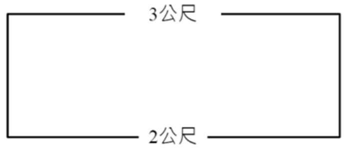
假設 A 部分的底面積=x cm^2→A 體積 $20x$ cm^3，B 體積 $5x$ cm^3

$20x+5x=30000$，$x=1200$

則 1200×20=24000，選 C。

二、計算題(每題 25 分，共 50 分，請寫出簡要過程，可得過程分)

1. 如右圖，農夫老王想用 95 公尺長的竹籬笆圍成一長方形菜圃，並在其中兩邊各留著寬 3 公尺與 2 公尺的出入口，則老王所能圍成之長方形最大面積為多少平方公尺?



<解析>

假設寬為 x 公尺，長為 y 公尺

$x+x+(y-3)+(y-2)=95$，$2x+2y=100$，$x+y=50$

$\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$，$25\geq\sqrt{xy}$，$xy\leq 625$

$\therefore$最大面積=625 平方公尺。

2. 已知 a、b、c、d 均為正數，$S=\dfrac{a}{a+b+d}+\dfrac{b}{b+c+a}+\dfrac{c}{c+d+b}+\dfrac{d}{d+a+c}$，求證 $1<S<2$。

<解析>

$\because a$、b、c、d 均為正數

$\therefore \dfrac{a}{a+b+d}<\dfrac{a}{a+b}$，$\dfrac{b}{b+c+a}<\dfrac{b}{a+b}$，$\dfrac{c}{c+d+b}<\dfrac{c}{c+d}$，$\dfrac{d}{d+a+c}<\dfrac{d}{c+d}$

$\therefore S<(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a+b})+(\dfrac{c}{c+d}+\dfrac{d}{c+d})=2$

又$\because \dfrac{a}{a+b+d}>\dfrac{a}{a+b+c+d}$，$\dfrac{b}{b+c+a}>\dfrac{b}{a+b+c+d}$，$\dfrac{c}{c+d+b}>\dfrac{c}{a+b+c+d}$，$\dfrac{d}{d+a+c}>\dfrac{d}{a+b+c+d}$

$\therefore S>\dfrac{a}{a+b+c+d}+\dfrac{b}{a+b+c+d}+\dfrac{c}{a+b+c+d}+\dfrac{d}{a+b+c+d}=1$

$\therefore 1<S<2$ 得證。