Examinee 學生資料
Country/國家:______ City/市(省):______ School/學校:______
Name/姓名:______ Sex/性別:______ Instructor/指導老師:______

2019 第十五屆 IMC 國際數學交流活動(新加坡)
Fifteenth IMC International Mathematics Contest (Singapore)2019

高中二年級(決賽)試卷

考試時間:90 分鐘　卷面總分:100 分　得分:________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	A	B	B	A	B	D
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$\frac{1}{729}$	(0,8)	$[1,\frac{3}{2})\cup[2,+\infty)$	$3,\sqrt{7},-1$	4	$\frac{500}{3}\pi$	$(p+0.1)a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. "△ABC為銳角三角形"是"sinA+sinB+sinC>cosA+cosB+cosC"的(　　)條件。
   (A)充分不必要 (B)必要不充分 (C)充分必要 (D)既不充分也不必要

<解析>
銳角三角形中：$\pi>A+B>\frac{\pi}{2}>A\rightarrow\frac{\pi}{2}>A>\frac{\pi}{2}-B>0$
，所以sinA>sin($\frac{\pi}{2}$-B)=cosB，
同理 sinB>cosC，sinC>cosA，所以充分。
反過來，對於等腰直角三角形，sinA+sinB+sinC>cosA+cosB+cosC 也成立，
所以不必要。選 A。

2. 方程$\sqrt[3]{15x+1-x^2}+\sqrt[3]{x^2-15x+27}=4$的實根個數為(　　)。
   (A)1　(B)2　(C)3　(D)前三個答案都不對

<解析>
注意到$(15x+1-x^2)+(x^2-15x+27)=28$為定值，故可設$t=15x+1-x^2$，則$x^2-15x+27=28-t$，原方程等價於：
$$t^{\frac{1}{3}}+(28-t)^{\frac{1}{3}}=4\Leftrightarrow t+3t^{\frac{1}{3}}(28-t)^{\frac{2}{3}}+3t^{\frac{2}{3}}(28-t)^{\frac{1}{3}}+28-t=4^3$$
$$\Rightarrow t^{\frac{1}{3}}(28-t)^{\frac{2}{3}}+t^{\frac{2}{3}}(28-t)^{\frac{1}{3}}=12$$
$\Rightarrow t^{\frac{1}{3}}(28-t)^{\frac{1}{3}}[t^{\frac{1}{3}}+(28-t)^{\frac{1}{3}}]=12$，又$t^{\frac{1}{3}}+(28-t)^{\frac{1}{3}}=4$，所以$t^{\frac{1}{3}}(28-t)^{\frac{1}{3}}=3$，解得$t^{\frac{1}{3}}=1$ 或 3，進而$t=15x+1-x^2=1$ 或 27，解得$x_1=0,x_2=15,x_3=2,x_4=13$，原方程實根個數為 4，故選 D。

3. Given A, B, C are the three interior angles (內角) of a triangle and the value of tanA, tanB, tanC is an integer (整數). Which of the following cannot be the value of tanA?
   (A)4　(B)3　(C)2　(D)1

<解析>
在三角形中，$\tan A=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C}$，設
$k=\tan A,x=\tan B,y=\tan C$，則$k,x,y\in Z$，$k=\frac{x+y}{xy-1}$，
$\therefore k=\frac{x+y}{xy-1}\Rightarrow kxy-k=x+y\Leftrightarrow k+x+y=kxy$，注意到$1+2+3=1\times2\times3$，所以 k 取 1,2,3 均可；
假設$k=4$成立，此時$\frac{x+y}{xy-1}=4\Leftrightarrow 4xy-x-y=4\Leftrightarrow(4x-1)(4y-1)=17$，顯然該不定方程無整數解，故$k\neq4$，選 A。

4. 已知數列$\{a_n\}$滿足$a_1=a_2=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=2a_n+2a_{n-1}$ (n∈N, n≥2)，則$\sum_{i=2}^{2019}\frac{1}{a_{i-1}a_{i+1}}$的整數部分是(　　)。 (A)0　(B)1　(C)2　(D)2019

<解析>
$\frac{1}{a_{n-1}a_{n+1}}=(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n+1}})\cdot\frac{1}{a_{n+1}-a_{n-1}}$，又
$a_{n+1}=2a_n+a_{n-1}\Rightarrow a_{n+1}-a_{n-1}=2a_n$，$\therefore\frac{1}{a_{n-1}a_{n+1}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_{n-1}a_n}-\frac{1}{a_na_{n+1}})$，所以
$$\sum_{i=2}^{2019}\frac{1}{a_{i-1}a_{i+1}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_2a_3}-\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{2018}a_{2019}}-\frac{1}{a_{2019}a_{2020}})$$
$$=\frac{1}{2}(4-\frac{1}{a_{2019}a_{2020}})$$
又由遞推關係知$a_{2019}>1,a_{2020}>1$，$\therefore\frac{1}{2}(4-\frac{1}{a_{2019}a_{2020}})\in(\frac{3}{2},2)$，
所以所求整數部分為 1.

5. 已知三角形ABC的三邊長為a、b、c，則下面4個結論中正確的個數為(　　)。
   (1)以$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$為邊長的三角形一定存在；
   (2)以a^2、b^2、c^2為邊長的三角形一定存在；
   (3)以$\frac{a+b}{2}$、$\frac{b+c}{2}$、$\frac{c+a}{2}$為邊長的三角形一定存在；
   (4)以|a-b|+1、|b-c|+1、|c-a|+1為邊長的三角形一定存在。
   (A)2　(B)3　(C)4　(D)1

<解析>
（1）（3）（4）是真命題，（2）是假命題，事實上，令$(a,b,c)=(2,4,5)$，則$(a^2,b^2,c^2)=(4,16,25)$ 不構成任何三角形三邊.

新加坡 決賽 11 年級
Singapore Final (Grade 11)

6. 已知 $x+y+z=2019$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2019}$，則(x-2019)(y-2019)(z-2019)的值為(　　)。

(A)0　(B)1　(C)-1　(D)2017

<解析>

$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=2019\cdot\frac{1}{2019}=1 \Leftrightarrow xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=-2xyz$,

所以 $(x-2019)(y-2019)(z-2019)=-(y+z)(z+x)(x+y)$

$=-[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz]=0$，選 A。

7. It is know that point A lies on the ellipse (橢圓) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ and point B lies on the circle $x^2+(y-4)^2=1$. What is the maximum value of $|AB|$?

(A)$2\sqrt{7}+1$　(B)$5+\sqrt{3}$　(C))$3\sqrt{3}+1$　(D)$4\sqrt{2}+1$

<解析>

問題轉化為先求橢圓上動點 A 到圓心 C(0, 4)的距離最大值，再加上半徑 1 即為|AB|的最大值：

設 $A(x_0, y_0)$，由 A 在橢圓上得 $\frac{{x_0}^2}{4}+\frac{{y_0}^2}{3}=1 \rightarrow {x_0}^2=4-\frac{4{y_0}^2}{3}(-\sqrt{3}\le y_0\le\sqrt{3})$

，$|AC|^2={x_0}^2+(y_0-4)^2=4-\frac{4{y_0}^2}{3}+(y_0-4)^2=-\frac{1}{3}(y_0+12)^2+68$

，當 $y_0=-\sqrt{3}$ 時，

$|AC|_{max}=\sqrt{-\frac{1}{3}(-\sqrt{3}+12)^2+68}=4+\sqrt{3}$

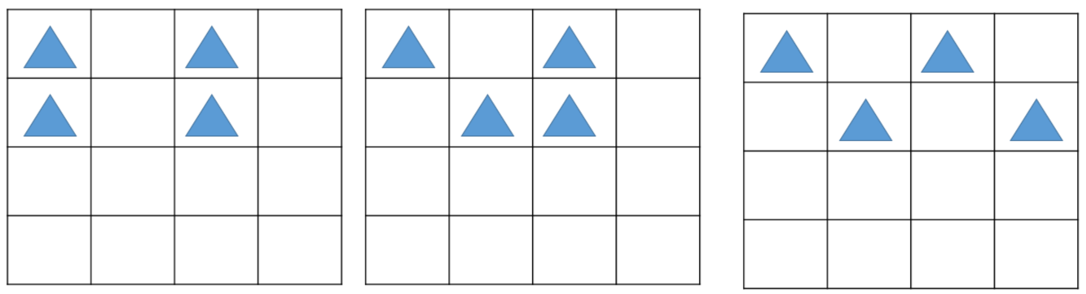
，

所以 $|AB|_{max}=|AC|_{max}+1=5+\sqrt{3}$

8. 將四個1、四個2、四個3、四個4填入一個4×4的表格，每格只填一個數字，且16個空格全部填滿，若每行每列恰有兩個偶數，則不同的填法共有(　　)。

(A)4620種　(B)323400種　(C)6300種　(D)441000種

<解析>



先在第一行挑出兩個格子放偶數，共 $C_2^4=6$ 種，然後第二行的方法共三大類，如上圖所示，此時可列出 16 個格子挑出 8 個符合要求的放偶數格式的方法數：

$6\times(1+C_1^2\cdot C_1^2\cdot C_1^1+C_2^4)=90$ 種，然後所求不同填法總數 $=90\times C_4^8\cdot C_4^8=441000$ 種.

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 設方程 $\log_{3x}3+\log_{27}3x=-\frac{4}{3}$ 的兩個根為 a 和 b，則 ab=______。

<解析>

記 $log_3 3x=t$, 則 $\frac{1}{t}+\frac{t}{3}=-\frac{4}{3}\Rightarrow t=-1,-3$，所以 $a=\frac{1}{9}, b=\frac{1}{81}$, 則 $ab=\frac{1}{729}$.

2. 已知函數 $f(x)=2mx^2-2(4-m)x+1$，$g(x)=mx$，若對於任一實數 x，$f(x)$ 與 $g(x)$ 至少有一個為正數，則實數 m 的取值範圍是_______。

<解析>

$m\le 0$ 時，當 x 接近 $+\infty$ 時，函數 $f(x)=2mx^2-2(4-m)x+1$ 與 $g(x)=mx$ 均非正，顯然不符合題意。注意到 $x=0$ 時，$f(0)=1>0$。

當 $m>0$ 時，若 $-\frac{b}{2a}=\frac{4-m}{2m}\ge 0$，即 $0<m\le 4$ 時結論顯然成立；

若 $-\frac{b}{2a}=\frac{4-m}{2m}<0$，此時時只要 $\Delta=4(4-m)^2-8m<0\Rightarrow 4<m<8$，

綜上 $0<m<8$，即 $m\in(0,8)$。

3. 函數 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域為______。

<解析>

$y=x+\sqrt{x^2-3x+2}\Rightarrow y-x=\sqrt{x^2-3x+2}\ge 0\Rightarrow(y-x)^2=(\sqrt{x^2-3x+2})^2$

$\Rightarrow y^2-2xy=-3x+2\Rightarrow x=\frac{y^2-2}{2y-3}\le y$，解得 $y\in[1,\frac{3}{2})\cup[2,+\infty)$

4. 方程 $x^2-2[x]-3=0$ 的所有實數解為______。

<解析>

$x^2-2[x]-3=0\Rightarrow[x]=\frac{x^2-3}{2}$，所以 $\frac{x^2-3}{2}\le x<\frac{x^2-3}{2}+1$ 且 $\frac{x^2-3}{2}$ 為整數，解得 $-1\le x<1-\sqrt{2}$ 或 $1+\sqrt{2}<x\le 3$，對應 $-\sqrt{2}<\frac{x^2-3}{2}\le -1$ 或 $\sqrt{2}<\frac{x^2-3}{2}\le 3$，由 $\frac{x^2-3}{2}$ 為整數解得 $x=-1,3$ 或 $\sqrt{7}$。

5. 設正項等差數列 $\{a_n\}$ 的前n項和為 S_n，若 $S_{2019}=4038$，則 $\frac{1}{a_{10}}+\frac{9}{a_{2010}}$ 最小值為______。

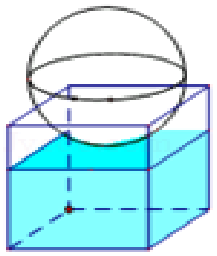
<解析>

$S_{2019}=(a_1+a_{2019})\cdot\frac{2019}{2}=(a_{10}+a_{2010})\cdot\frac{2019}{2}=4038\Rightarrow a_{10}+a_{2010}=4$，

$\therefore\frac{1}{a_{10}}+\frac{9}{a_{2010}}\ge\frac{(1+3)^2}{a_{10}+a_{20010}}=4$，取等條件 $\frac{1}{a_{10}}=\frac{3}{a_{2010}}$

新加坡 決賽 11 年級
Singapore Final (Grade 11)

6. The given figure shows an uncovered cub (無蓋正方體) transparent container (透明容器) with a height a height of 8 cm. A ball is placed at the mouth of the container filled with water. When the surface (表面) of the ball touchers the water surface, the depth (深度) of the water is 6 cm, if the thickness (厚度) of the container is not considered what is the volume of the ball?



<解析>

根據幾何意義得出：邊長為 8 的正方形，球的截面圓為正方形的內切圓，

故截面圓的半徑為 4，

∵球面恰好接觸水面時測得水深為 6cm，∴d＝8− 6＝2cm，

∴球的半徑 R 滿足：$(R-2)^2+4^2=R^2 \Rightarrow R=5$

∴球的體積為$\frac{4}{3}\pi\cdot 5^3=\frac{500}{3}\pi$.

7. 若保險公司新開設了一項保險業務，規定該份保單在一年內如果事件E發生，則該公司要賠償a元，假若在一年內E發生的概率為P，為使公司受益的期望值不低於a的$\frac{1}{10}$，公司應要求該份保單的顧客繳納的保險金最少為______。

<解析>

用隨機變數ξ表示此項業務的收益額，x表示顧客繳納的保險金，

則ξ的所有可能取值為x，$x-a$，

且$P(\xi=x)=1-p$，$P(\xi=x-a)=p$，$\therefore E\xi=x(1-p)+(x-a)p=x-ap$，

∵公司受益的期望值不低於a的$\frac{1}{10}$，$\therefore x-ap..\frac{1}{10}a$，$\therefore x..(p+0.1)a$（元）

8. 已知複數$z_1 \neq z_1$，$|z_1|=\sqrt{2}$，則$\left|\frac{z_1-\overline{z_2}}{2-z_1z_2}\right|$=______。

<解析>

由$|z_1|=\sqrt{2}$得$z_1\overline{z_1}=2$，所以$\left|\frac{z_1-\overline{z_2}}{2-z_1z_2}\right|=\left|\frac{z_1-\overline{z_2}}{z_1\overline{z_1}-z_1z_2}\right|=\left|\frac{z_1-\overline{z_2}}{z_1(\overline{z_1}-z_2)}\right|$

$=\frac{|z_1-\overline{z_2}|}{|z_1|\cdot|\overline{z_1}-z_2|}=\frac{1}{|z_1|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 實數 a、b、c 滿足 $a^2+b^2+c^2=1$，求 $a(a+b+c)$的最大值.

<解析>

$\because a(a+b+c)=a^2+(b+c)a$，欲求$a(a+b+c)$的最大值，顯然應考慮$a$與$b+c$同號的情形，不妨設$a\geq 0$：

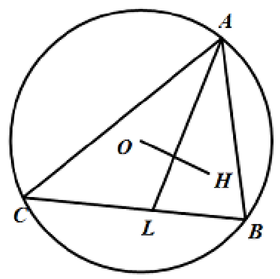
由$a^2+b^2+c^2=1$可得

$a(a+b+c)=a^2+(b+c)a\leq a^2+\sqrt{2(b^2+c^2)}\cdot a=a^2+a\sqrt{2(1-a^2)}$

令$a=\sin\theta\ (0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2})$，則上式等於$a(a+b+c)\leq\sin^2\theta+\sin\theta\sqrt{2\cos^2\theta}$

$=\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\frac{\sqrt{2}\sin 2\theta}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\theta-\arctan\frac{\sqrt{2}}{2})\leq\frac{1+\sqrt{3}}{2}$。

2. 如圖，在半徑為 1 的圓 O 中內接有銳角三角形 ABC，H 是△ABC 的垂心，角平分線$\overline{AL}$垂直於$\overline{OH}$，求$\overline{BC}$長。



<解析>

圓心 O 及垂心 H 都在銳角三角形 ABC 的內部，延長 AO 交圓於 N，

連接 AH 並延長至 H1 與 BC 相交，

連接 CN，在 Rt△CAN 和 Rt△AH1B 中，∠ANC=∠ABC，

於是有∠CAN=∠BAH1，再由 AL 是△ABC 的角平分線，

得∠1=∠2．由條件 AP⊥OH，得 AH=AO=1．

連接 BO 交圓於 M，連接 AM、CM、CH，

可知 AMCH 為平行四邊形，

所以 CM=AH=AO=1，BM=2，因為△MBC 是直角三角形，由畢氏定理得$BC=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.