Examinee 學生資料

Country/國家: ______ School/學校: ______ City/市(省): ______

Name/姓名: ______ Sex/性別: ______ Instructor/指導老師: ______

2020 第十六屆 IMC 國際數學交流活動(新加坡)

Sixteenth IMC International Mathematics Contest (Singapore)2020

高中二年級(決賽)試卷

考試時間:90 分鐘　卷面總分:100 分　得分:________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	A	C	C	A	A	B
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	n^2+n	8910	240	80	$25\sqrt{3}$	$\frac{19}{33}$	(5, -2)	$(16\sqrt{3}, 8\sqrt{7})$

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. What is the solution of $2|x|-|x-1|<5$?
(A)$-6<x<4$　(B)$1\le x<4$　(C)$-3<x<4$　(D)$-2\le x<4$

<解析>

①$x<0$，$-2x+x-1<5$，$x>-6$

②$0\le x<1$，$2x+x-1<5$，$3x<6$，$x<2$

③$1\le x$，$2x-x+1<5$，$x<4$

則取值範圍: $-6<x<4$，選A。

2. 設$(7.2)^x=(0.8)^y=3$，求$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=$?
(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

<解析>

$(7.2)^x=3$ ➔ $7.2=3^{\frac{1}{x}}$

$(0.8)^y=3$ ➔ $0.8=3^{\frac{1}{y}}$

$3^{\frac{1}{x}}\div 3^{\frac{1}{y}}=\frac{7.2}{0.8}=9=3^2$，$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2$，選B。

3. 設 $\deg f(x)\ge 3$，以 x^2-x+1 除 $f(x)$的餘式為 $2x-3$，以 $x-1$ 除 $f(x)$的餘式為 1，則 f(x)除以$(x^2-x+1)(x-1)$所得的餘式為_______。(A)$2x^2-1$ (B)$3x^2-1$ (C)$2x^2-x-1$ (D)$3x^2-x-1$

<解析>

$f(x)=(x^2-x+1)p(x)+2x-3$

$f(x)=(x-1)q(x)+1$

令$f(x)=(x^2-x+1)(x-1)r(x)+m(x^2-x+1)+2x-3$

➔ $f(1)=m\cdot(1-1+1)+2-3=1$，$m=2$，餘式$=2(x^2-x+1)+2x-3=2x^2-1$，選A。

4. A is a positive irrational number, b is the decimal part, and $a+b^2=m$, m is a positive whole number. What is the value of b? (A)$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (B)$\frac{1+\sqrt{6}}{2}$ (C)$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (D)$\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$

<解析>

令a的整數部分為n，即$a=n+b$代入$a+b^2=m$

得$b^2+b=(m-n)$為一整數，且$0<b<1$，所以$0<b+b^2<2$

$\therefore b+b^2=1$，$b^2+b-1=0$，$b=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，且$b>0$，$b=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，選C。

5. 某容器中有濃度 80%的食鹽水 100 克，今從此容器中倒出 40 克的食鹽水，再倒入 40 克的純水於此容器中，這樣叫操作一次，反覆此操作，問至少要操作幾次後，容器中的食鹽水的濃度會小於 1%? ($\log 2\fallingdotseq 0.3010$，$\log 3\fallingdotseq 0.4771$)
(A)7　(B)8　(C)9　(D)10

<解析>

設a_n表示操作n次後的食鹽水濃度

$a_1=80\%\times(1-\frac{40}{100})=80\%\times\frac{3}{5}$；$a_2=80\%\times(1-\frac{40}{100})=80\%\times(\frac{3}{5})^2$；……..　；$a_n=80\%\times(1-\frac{40}{100})=80\%\times(\frac{3}{5})^n$

且$80\%\times(\frac{3}{5})^n<1\%$ ➔ $(\frac{3}{5})^n<\frac{1}{80}$

$\therefore n\log\frac{3}{5}<\log\frac{1}{80}$，$n(\log 3-\log 5)<-\log 80$，$n(\log 3-\log 5)<-(\log 10+3\log 2)$

$\therefore n(0.4771-0.699)<-(1+3\times 0.301)$ ➔ $-0.2219n<-1.903$，$n>\frac{1.903}{0.2219}\fallingdotseq 8.576$

則n至少9次，選C。

6. 設$f(x)=x^2-2ax+a$，若任意實數x，恆使$f(x)>-2$成立，求實數a的範圍?
(A)$-1<a<2$　(B)$-2<a<1$　(C)$-1<a<3$　(D)$-2<a<3$

<解析>

$x^2-2ax+a>-2$，$x^2-2ax+a+2>0$

判別式$D=(-2a)^2-4(a+2)<0$，

$a^2-a-2<0$，$(a-2)(a+1)<0$，$-1<a<2$

選A。

7. 若方程式$(\log 2x)\cdot(\log 3x)=1$之二根為$\alpha$、$\beta$，則$\alpha\beta=$?
(A) $\frac{1}{6}$　(B) $-\frac{1}{6}$　(C) 6　(D) -6

<解析>

原式$=(\log x+\log 2)(\log x+\log 3)=1$

$(\log x)^2+(\log 2+\log 3)\log x+(\log 2\log 3-1)=0$

令 $t=\log x$，$t^2+(\log 2+\log 3)t+(\log 2\log 3-1)=0$

且兩根為 $\log\alpha$、$\log\beta$

$\log\alpha+\log\beta=-(\log 2+\log 3)$

$\log\alpha\beta=-\log 6$，$\log\alpha\beta=\log\frac{1}{6}$，$\alpha\beta=\frac{1}{6}$，選 A。

8. $f(x)=\frac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$，$x\in R$，若 $f(x)$最小值 a，最大值 b，則 $a+b$=?

(A)5 (B)6 (C)7 (D)8

<解析>

令 $y=\frac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$，$yx^2+yx+y=2x^2-x+2$

$(y-2)x^2+(y+1)x+(y-2)=0$

①$y-2=0 \Rightarrow y=2$，$3x=0$，$x=0$

② $y-2\neq 0 \Rightarrow (y-2)x^2+(y+1)x+(y-2)=0$ 是 x 的一元二次方程式，有實根

$D=(y+1)^2-4(y-2)(y-2)\geq 0$

$-3y^2+18y-15\geq 0$，$1\leq y\leq 5$

$\therefore y=f(x)$最小值 1，最大值 5，則 $a+b=1+5=6$，選 B。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. The sequence $<a_n>$ satisfying $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{n+2}{n}a_n$. Find a_n=_______.

<解析>

$\because\ a_{k+1}=\frac{k+2}{k}a_k$，$k$=1、2、3、……

$k=1$，$a_2=\frac{3}{1}a_1$

$k=2$，$a_3=\frac{4}{2}a_2$

$k=3$，$a_4=\frac{5}{3}a_3$

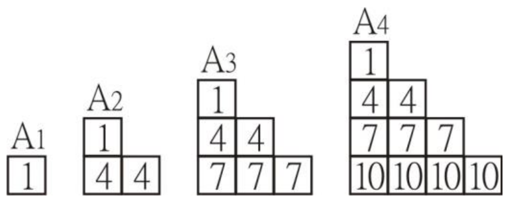
……..

$k=n-1$，$a_n=\frac{5}{3}a_{n-1}$

左式=右式 $\Rightarrow a_n= a_1\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n+1}{n-1}$

$= a_1\cdot\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}=2\cdot\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}=n^2+n$

2. 等差數列 1、4、7、10、13、…..按右列規律排入 A_1、A_2、A_3、…..之方陣中，則 A_{20} 之方格中所有數字之總和為_______。



<解析>

(1)1、4、7、10、13、…，

第 n 項為 $1+(n-1)\times 3=3n+2$

又 $n=20$，$a_{20}=3\times 20-2=58$

(2)求 $1\times 1+2\times 4+3\times 7+\ldots+20\times 58$

$=\sum_{k=1}^{20} k(3k-2)=3\sum_{k=1}^{20} k^2-2\sum_{k=1}^{20} k=3\times\frac{20\times 21\times 41}{6}-2\times\frac{20\times 21}{2}=8610-420=8190$

3. 4 out of 6 people will visit cities A, B, C, and D. Each city has to have one visitor and each visitor can only go visiting one city. Thus, Alex and Leo are not going to visit city D, then there are _______ types of visiting plans.

<解析>

6 人取 4 人任意安排-兩人之一去到城市 D

$P^6_4-2\times P^5_3=360-120=240$ 種

4. 試求$\frac{(1+2x)^5-1}{x}$展開式中，x^2 項的係數是_______。

<解析>

設 x^3 項為$(1+2x)^5$ 展開式中的第 $k+1$ 項

則 $C^5_k(1)^{5-k}(2x)^k=2^k\cdot C^5_k\cdot x^k$

取 k=3，係數$=2^3\cdot C^5_3=80$

5. In $\triangle ABC$, $\overline{AC}=10\sqrt{3}$, $\overline{AB}=10$, $\angle B=120°$, find the area of $\triangle ABC$ is _______.

<解析>

$\triangle$ABC 面積$=\frac{1}{2}\times 10\times 10\sqrt{3}\times\sin A$

且$\frac{10\sqrt{3}}{\sin 120°}=\frac{10}{\sin C}\Rightarrow \sin C=\frac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{10\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

$\therefore\angle C=30°$ 或 $150°$（不合，三角形內角和$=180°$）

$\Rightarrow\angle A=180°-120°-30°=30°$

$\triangle$ABC 面積$=\frac{1}{2}\times 10\times 10\sqrt{3}\times\sin 30°=\frac{1}{2}\times 10\times 10\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=25\sqrt{3}$

6. 某一工廠生產燈泡，12 個裝成一盒。工廠品質檢驗的方法是從每盒中任取 4 個來檢查，如有兩個或兩個以上是壞的，則整盒淘汰。若某一盒有 5 個壞燈泡，則這一盒會被淘汰的機率是_______。

<解析>

$1-\frac{C^5_0\cdot C^7_4}{C^{12}_4}-\frac{C^5_1\cdot C^7_3}{C^{12}_4}=1-\frac{1\times\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}}{99\times 5}-\frac{5\times\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}}{99\times 5}=1-\frac{7}{99}-\frac{35}{99}=\frac{57}{99}=\frac{19}{33}$

7. $x\in R$，$y=2+2(\sin x-\cos x)+\sin 2x$ 之最大值為 M，最小值為 m，若 $M+m=A+B\sqrt{2}$，A、B 為整數，則數對(A, B) _______。

<解析>

令 $t=\sin x-\cos x$ $\because x\in R$ $\therefore -\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$

則 $t^2=1-2\sin x\cos x=1-\sin 2x\Rightarrow\sin 2x=1-t^2$

原式$\Rightarrow$ $y=2+2(\sin x-\cos x)+\sin 2x=2+2t+(1-t^2)$

$=-t^2+2t+3=-(t-1)^2+4$，$-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$

取 $t=1$，$max=4$

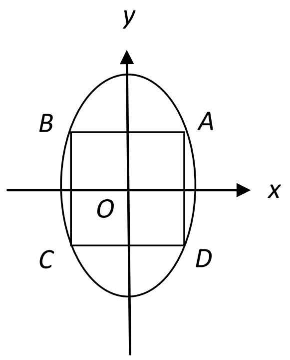
取 $t=-2\sqrt{2}$，$min=1-2\sqrt{2}$

$\Rightarrow M+n=4+(1-2\sqrt{2})=5-2\sqrt{2}$

$\therefore(A, B)=(5, -2)$

新加坡 決賽 11 年級
Singapore Final (Grade 11)

8. 令橢圓$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$的內接矩形面積最大值為 M，內接矩形周長最大值為 N，求數對(M, N)為________。



<解析>

$A(2\sqrt{3}\cos\theta, 4\sin\theta)$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$u=2\sqrt{3}\cos\theta\times4\sin\theta\times4$

$=32\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$

$=16\sqrt{3}\sin2\theta$，$0<2\theta<\pi$

面積 u 的最大值 $16\sqrt{3}$，即 $M=16\sqrt{3}$

矩形 ABCD 之周長為 $v=(2\sqrt{3}\cos\theta+4\sin\theta)\times4$

$=8\sqrt{3}\cos\theta+16\sin\theta$

周長 v 的最大值為$\sqrt{(8\sqrt{3})^2+16^2}=8\sqrt{7}$

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. (1)分解 x^4+4y^4

(2)證明有無窮多個自然數 a 具有下列的性質:

對任意自然數 n，$z=n^4+a$ 不是質數。

<解析>

(1) $x^4+4y^4= x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2$

$=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2$

$=(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy)$

(2)令 $a=4k^4$，$k=2$、3、4、5、……

則有 $z=n^4+4k^4=(n^2+2k^2+2nk)(n^2+2k^2-2nk)$

對於每個自然數 n，如果 $k\geq2$，得到

$n^2+2k^2+2nk\geq n^2+2k^2-2nk=(n-k)^2+k^2\geq k^2\geq4$

$\therefore n^2+2k^2+2nk$ 及 n^2+2k^2-2nk 都是大於 1 的自然數

對無窮多的 $k(\geq2)$，如取 $a=4k^2$，$z=n^4+a$ 不會是質數。

2. 有一種機器，每天要付維修費，在買回來以後的第 t 天，應該負的維修費是$(t+500)$元(買來當天的維修費以 $t=0$ 計算)。購買機器時，花的費用是 50 萬元。買回來後，過若干天就報廢。用多少天以後報廢最合算?

<解析>

①利用 a、$b>0\Rightarrow\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (當 a=b 時，等號成立)

②設買來後過 t 天報廢，那麼所花的錢除去 50 萬的購買費用以外，還有買來當天和以後(t-1)天的維修費

令平均每天損耗 y 元，總損耗 yt 元

$yt=500+(500+1)+(500+2)+\ldots+(500+t-1)+500000$

$yt=\frac{t(500+500+t-1)}{2}+500000$，$yt=\frac{t^2+999t}{2}+500000$

③$y=\frac{t+999}{2}+\frac{500000}{t}=\frac{t}{2}+\frac{999}{2}+\frac{500000}{t}\geq2\sqrt{\frac{t}{2}\times\frac{500000}{t}}+\frac{999}{2}$

當$\frac{t}{2}=\frac{500000}{t}$，$t^2=10000000$，$t=1000$，y 有最小值，則 1000 天

新加坡 決賽 11 年級
Singapore Final (Grade 11)