

2016 IMC 國際數學競賽 台灣區初賽

2016 International Mathematics Contest (Taiwan)

高中一年級組 試卷

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題 (每題 10 分)

(A) 1. Calculate the exact value of $(379+379)\times 500$?

(A) 379000 (B) 397000 (C) 558000 (D) 548000

解析： $379\times 2\times 500=379\times 1000=379000$

(A) 2. 若 $a=\sqrt{5}+\sqrt{8}$, $b=\sqrt{6}+\sqrt{7}$, $c=\sqrt{3}\times\sqrt{10}$ 則下列哪一選項正確?

(A) $a < b < c$ (B) $b < c < a$ (C) $c < a < b$ (D) $a < c < b$

解析： $\because a^2=(\sqrt{5}+\sqrt{8})^2=5+2\sqrt{40}+8=13+2\sqrt{40}=13+\sqrt{160}$

$b^2=(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2=6+2\sqrt{42}+7=13+2\sqrt{42}=13+\sqrt{168}$

$c^2=(\sqrt{3}\times\sqrt{10})^2=3\times 10=30=13+17=13+\sqrt{17^2}=13+\sqrt{289}$

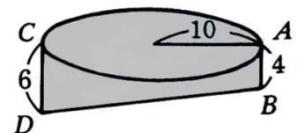
$\therefore \sqrt{160} < \sqrt{168} < \sqrt{289}$, $\therefore a^2 < b^2 < c^2$, 又 $a > 0, b > 0, c > 0$

$\therefore a < b < c$, 選(A)

(C) 3. 對任意實數 x , $64^{x^2+\frac{2}{3}}$ 的最小值是多少? (A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 64

解析： $\because x^2+\frac{2}{3}$ 的最小值為 $\frac{2}{3}$, $\therefore 64^{x^2+\frac{2}{3}}$ 的最小值為 $64^{\frac{2}{3}}=(4^3)^{\frac{2}{3}}=4^2=16$

(A) 4. 底面半徑 10 公分的圓柱切成如右圖 (剖面是平面), 只知 \overline{AB} 長 4 公分, \overline{CD} 長 6 公分, 則這形體的體積是多少立方公分?



(A) 500π (B) 600π (C) 800π (D) 1000π

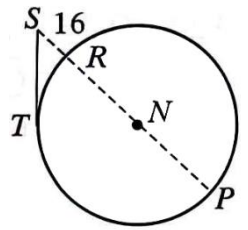
解析：再補一個大小相同的形體，上下銜接好形成一圓柱體 (如下圖)，

圓柱的體積 = $10\times 10\times \pi\times 10=1000\pi$

\therefore 所求體積 = $\frac{1000\pi}{2}=500\pi$



- (D) 5. 右圖的圓形噴水池，小龍想要測量它的直徑，他先從水池外的 S 點，正對池心 N 測得 S 到池邊的距離 \overline{SR} 為 16 公尺，再測得水池的切線 \overline{ST} 的長為 40 公尺，則水池的直徑為幾公尺？ (A) 56 (B) 64 (C) 80 (D) 84

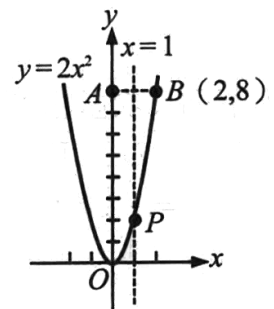


解析：令直徑 $\overline{PR} = x$ ， $\overline{ST}^2 = \overline{PS} \times \overline{SR}$ ， $40^2 = 16(x+16)$
 $1600 = 16(x+16)$ ， $100 = x+16$ ， $x = \underline{84}$

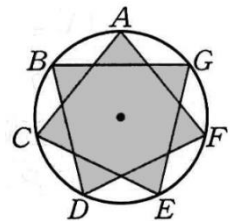
- (B) 6. 坐標平面上兩點 $A(0,8)$ 、 $B(2,8)$ ，若有一點 P 在 $y=2x^2$ 的圖形上，使得 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，若 P 點的坐標是 (a,b) ，則 $a+b = ?$
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

解析： \overline{AB} 的中垂線： $x = \frac{0+2}{2}$ ， $x=1$

P 在 $y=2x^2$ 圖形上，且 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ， $\therefore P$ 在 \overline{AB} 的中垂線上
 $x=1$ 代入 $y=2x^2 \rightarrow y=2 \times 1^2 = 2 \rightarrow P(1,2) \rightarrow a=1, b=2$



- (B) 7. 如右圖，大發公司的商標是一個在圓內的七角星形，則 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G = ?$
 (A) 720° (B) 540° (C) 360° (D) 1080°

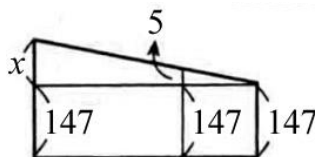


解析： \widehat{AG} 、 \widehat{GF} 、 \widehat{EF} 、 \widehat{DE} 、 \widehat{CD} 、 \widehat{BC} 、 \widehat{AB} 皆加三次
 $360^\circ \times 3 \times \frac{1}{2} = 540^\circ$

- (B) 8. 某次集會，身高 147 公分的小慧發現陽光正好被站在前排身高 152 公分的小玉遮住(剛剛好遮到頭頂)，剛站在小玉前方兩排遠的導師也剛好遮住照在小玉身上的陽光，如右圖。於是小慧依此推算她們導師的身高為多少公分？
 (A) 160 (B) 162 (C) 164 (D) 166



解析：如右圖，設導師比小慧高 x 公分
 $(152-147) : x = 1 : 3 \rightarrow x = 15$
 $\therefore 147+15=162$ 公分



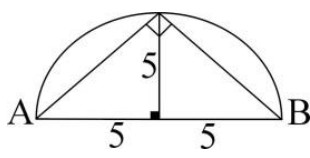
- (A) 9. 斜邊為 10 公分的所有直角三角形中，面積最大的是多少平方公分？
 (A) 25 (B) 50 (C) 75 (D) 100

解析：設一股為 x ，則另一股為 $\sqrt{100-x^2}$

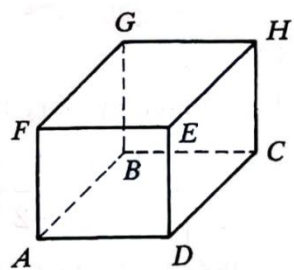
$$\begin{aligned} \text{面積} &= \frac{x\sqrt{100-x^2}}{2} = \frac{\sqrt{x^2(100-x^2)}}{2} = \frac{\sqrt{-x^4+100x^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{-(x^2-50)^2+2500}}{2} \leq \frac{\sqrt{2500}}{2} = 25 \end{aligned}$$

另解：

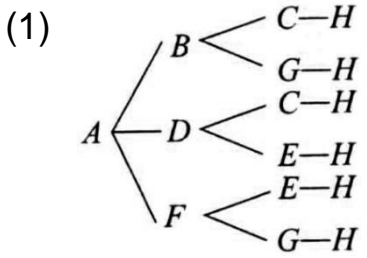
最大面積 = $\frac{10 \times 5}{2} = 25$



- (B) 10. 如右圖，沿正方體的各邊取捷徑，問：其中經過 C 點的機率 = ?
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6}$

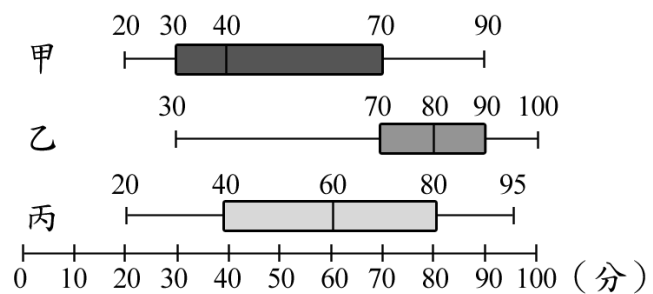


解析：共有 6 種走法



(2) 通過 C 點的走法有
 $A-B-C-H$ 與 $A-D-C-H$ 2 種
 \therefore 機率 = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- (D) 11. 甲、乙、丙三班都是 40 人，若三班全班同時參加一個數學檢定，其成績的盒狀圖如右圖，則下列四個選項之敘述，何者是錯誤的？



- (A) 丙班的全距最大
 (B) 乙班的四分位距最小
 (C) 同樣考 60 分在甲班的百分位數最高
 (D) 成績中間 50% 的同學甲班平均最高

- 解析：(A) 甲班的全距=90-20=70，乙班的全距=100-30=70，
丙班的全距=95-20=75，丙班的全距最大
(B) 甲班的四分位距=70-30=40，乙班的四分位距=90-70=20，
丙班的四分位距=80-40=40，∴乙班的四分位距最小
(C) 考 60 分在甲班約第 67 百分位數，在乙班約第 24 百分位數，
在丙班約第 50 百分位數，∴在甲班的百分位數最高
(D) 中間 50%甲班平均最低。故選(D)

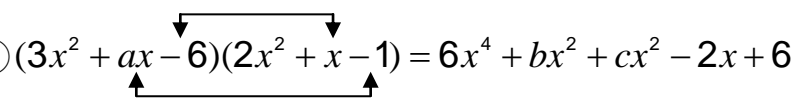
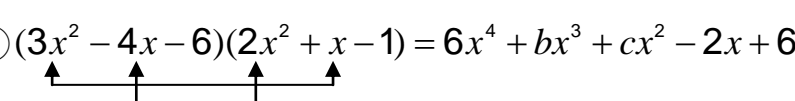
- (D) 12. 我國以前自用小汽車的牌照號碼，前三位為大寫英文字母，後四位為數字，例如 ABD-0950。若最後一位數字不用 4，且後四位數字沒有 0000 這個號碼，那麼我國可能有的自用小汽車牌照號碼有多少個？
(A) $26 \times 25 \times 24 \times (4320 - 1)$ (B) $26 \times 25 \times 24 \times 4320 - 1$
(C) $26 \times 26 \times 26 \times (5040 - 1)$ (D) $26 \times 26 \times 26 \times (9000 - 1)$

解析：牌照號碼為□□□○○○○前兩位填英文字母，
其填法有 $26 \times 26 \times 26$ 種，而後四位填 0~9 的整數，但末位不用數字 4 且沒有 0000 的號碼，後四位的填法有 $10 \times 10 \times 10 \times 9 - 1$ 種，
故所有的號碼有 $26 \times 26 \times 26 \times (9000 - 1)$ 種，故選(D)

- (D) 13. 設 a, b 為實數，若 $a+b=10, ab=7, a^3+b^3=?$
(A) 700 (B) 730 (C) 760 (D) 790

解析： $a^3+b^3=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-3a^2b-3ab^2=(a+b)^3-3ab(a+b)$
 $=10^3-3 \times 7 \times 10=790$

- (A) 14. 若 $(3x^2+ax-6)(2x^2+x-1)=6x^4+bx^3+cx^2-2x+6$ ，求 $a+b+c$ 之值。
(A) -28 (B) -26 (C) -24 (D) -22

解析：① $(3x^2+ax-6)(2x^2+x-1)=6x^4+bx^3+cx^2-2x+6$

 x 項係數 $= a \times (-1) + (-6) \times 1 = -2, -a - 6 = -2, a = -4$
 ② $(3x^2-4x-6)(2x^2+x-1)=6x^4+bx^3+cx^2-2x+6$

 $\therefore b = 3 \times 1 + (-4) \times 2 = 3 - 8 = -5$

$$c = 3 \times (-1) + (-4) \times 1 + (-6) \times 2 = -19$$

$$\textcircled{3} \therefore a + b + c = -4 - 5 - 19 = -28$$

(A) 15. 下列選項中的數，何者最大？（其中 $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ ）

- (A) 10^{100} (B) 50^{50} (C) $50!$ (D) $\frac{100!}{50!}$

解析：(A) $10^{100} = (10^2)^{50} = 100^{50}$

(B) $50^{50} < 100^{50} = 10^{100}$

(C) $50! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 50 < 50 \times 50 \times \dots \times 50 = 50^{50} < 100^{50} = 10^{100}$

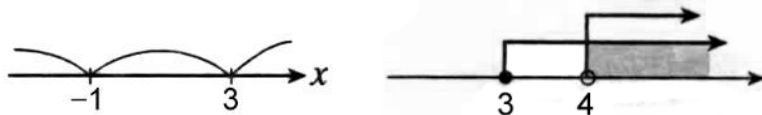
(D) $\frac{100!}{50!} = 51 \times 52 \times 53 \times \dots \times 100 < 100 \times 100 \times \dots \times 100 = 100^{50} = 10^{100}$

\therefore 最大的數為 10^{100}

(B) 16. 求 $|x+1| + |x-3| > 6$ 的解？

- (A) $-2 < x < 4$ (B) $x > 4$ 或 $x < -2$
 (C) $-1 < x < 3$ (D) $x > 3$ 或 $x < -1$

解析：



(1) 當 $x \geq 3$ 時， $x+1+x-3 > 6 \rightarrow x > 4 \dots\dots \textcircled{1}$

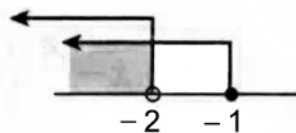
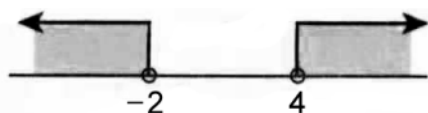
(2) 當 $-1 < x < 3$ 時， $x+1 > 0$ ， $x-3 < 0$

$$x+1-x+3 > 6 \rightarrow 4 > 6 \text{ 不合} \dots\dots \textcircled{2}$$

(3) 當 $x \leq -1$ 時， $x+1 \leq 0$ ， $x-3 < 0$

$$-x-1-x+3 > 6 \rightarrow -2x+4 \rightarrow x < -2 \dots\dots \textcircled{3}$$

由 $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ 得 $x > 4$ 或 $x < -2$ 為所求



(A) 17. 設 $a, b \in R$ ，且二次函數 $f(x) = a(x-1)^2 + b$ 滿足 $f(4) > 0$ 、 $f(5) < 0$ ，則甲 $f(0) > 0$ 、乙 $f(-1) > 0$ 、丙 $f(-2) > 0$ 、丁 $f(-3) > 0$ 、戊 $f(-4) > 0$ 哪些選項是正確的？

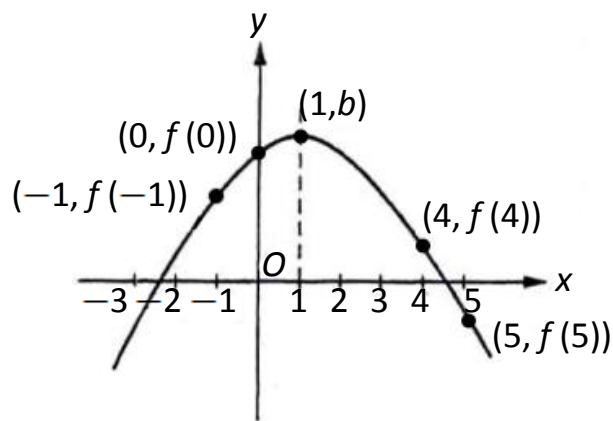
- (A) 甲乙丙 (B) 甲乙丁 (C) 甲丙丁 (D) 甲丙戊

解析： $f(x) = a(x-1)^2 + b$ ，

對稱軸： $x=1$ ，頂點 $(1, b)$

$\because f(4) > 0$ 、 $f(5) < 0$ ，

\therefore 其圖形如右，其中 $f(x) = 0$ 之根在 -3 與 -2 之間以及 4 與 5 之間



(甲) ○： $f(0) > 0$

(乙) ○： $(-1, f(-1))$ 在第二象限 $\therefore f(-1) > 0$

(丙) ○： $(-2, f(-2))$ 在第二象限 $\therefore f(-2) > 0$

(丁) ×： $(-3, f(-3))$ 在第三象限 $\therefore f(-3) < 0$

(戊) ×： $(-4, f(-4))$ 在第三象限 $\therefore f(-4) < 0$

(C) 18. 對任意實數 x 值，二次函數 $f(x) = x^2 + ax + a$ 之值恆大於 -8 ，則實數 a 的範圍為何？

(A) $-8 < a < 4$ (B) $a > 4$ 或 $a < -8$

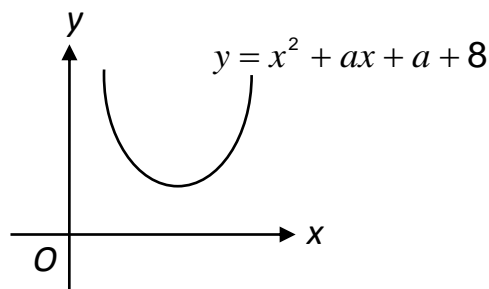
(C) $-4 < a < 8$ (D) $a > 8$ 或 $a < -4$

解析： $f(x) = x^2 + ax + a > -8$ ，對所有實數 x

$\rightarrow y = x^2 + ax + a + 8 > 0$ ，對所有實數 x

則 $D = a^2 - 4(a+8) < 0 \rightarrow a^2 - 4a - 32 < 0$ ，

$\rightarrow (a-8)(a+4) < 0$ ， $\therefore -4 < a < 8$



(C) 19. 求 $15^7 - 230 \times 15^5 + 78 \times 15^4 - 46 \times 15^3 - 5 \times 15^2 + 270 \times 15 + 50 = ?$

(A) -200 (B) -300 (C) -400 (D) -500

解析：原式 $\rightarrow f(x) = x^7 - 230x^5 + 78x^4 - 46x^3 - 5x^2 + 270x + 50$ ，

求 $f(15)$ 即求 $f(x)$ 除以 $x-15$ 之餘式

$$\begin{array}{r|l} 1+ & 0-230+78-46- & 5+270+ & 50 & \\ +15+ & 225-75+45-15- & 300- & 450 & \\ \hline 1+15- & 5+ & 3- & 1-20- & 30- & 400 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 15 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

答： -400

(B) 20. x 、 y 、 z 是正實數 $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z)$ ，求 $x \cdot y \cdot z = ?$

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

解析： $x \geq 0, y \geq 1, z \geq 2, 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} + 2\sqrt{z-2} = x + y + z$

$$x - 2\sqrt{x} + y - 2\sqrt{y-1} + z - 2\sqrt{z-2} = 0$$

$$\{(\sqrt{x})^2 - 2(\sqrt{x}) + 1^2\} + \{(\sqrt{y-1})^2 - 2(\sqrt{y-1}) + 1^2\} + \{(\sqrt{z-2})^2 - 2(\sqrt{z-2}) + 1^2\} = 0$$

$$(\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{y-1}-1)^2 + (\sqrt{z-2}-1)^2 = 0$$

$$\sqrt{x}-1=0, \sqrt{y-1}-1=0, \sqrt{z-2}-1=0, \sqrt{x}=1, \sqrt{y-1}=1$$

$$\sqrt{z-2}=1, x=1, y-1=1, z-2=1, y=2, z=3 \Rightarrow x \cdot y \cdot z = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

(B) 21. 你參加賽跑，追過第 2 名，你是第幾名？

(A) 第 1 名 (B) 第 2 名 (C) 第 3 名 (D) 第 4 名

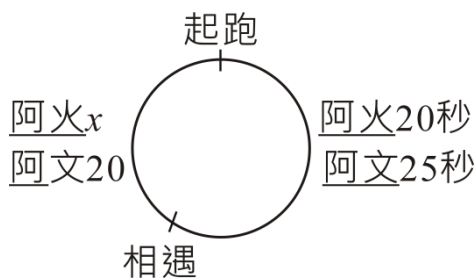
解析：追過第 2 名，取代他的名次，所以你是第 2 名

(C) 22. 有一個環形跑道，阿文、阿火從休息亭起跑，阿文跑一圈需要 45 秒，

阿火反方向跑，每 20 秒會和阿文相遇一次，請問阿火跑一圈需要幾

秒？ (A) 25 (B) 30 (C) 36 (D) 40

解析：



$$45 - 20 = 25$$

$$x : 20 = 20 : 25, x = 16$$

$$\therefore 20 + 16 = 36$$

(B) 23. 某校由 200 位學生投票選拔三位模範生（一人一票，有可能無效票），

已知有 6 位候選人，選舉結果每人票數都不同，且每人至少有一票。

結果周吉倫當選且票數是第 3 高，那麼他最多可能有幾票？

(A) 62 (B) 63 (C) 64 (D) 65

解析：令周吉倫得 x 票

對周最有利

$$\rightarrow x + 2 + x + 1 + x + 3 + 2 + 1 \leq 200$$

$$\rightarrow x \leq 63 \frac{2}{3}, x \text{ 最大} = 63$$

名次	1	2	3	4	5	6
票	$x+2$	$x+1$	x	3	2	1

$$\text{算術：}(200 - 3 - 2 - 1 - 1 - 2) \div 3 = 63 \frac{2}{3} \therefore \text{最多 } 63 \text{ 票}$$

(A) 24. 在一慈善捐款活動中有 a_1 個人至少捐 1 萬元，有 a_2 個人至少捐 2 萬元，

有 a_3 個人至少捐 3 萬元……，有 a_n 個人至少捐 n 萬元，沒人捐超過 n

萬元，總共收到捐款多少萬元？

$$(A) a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

$$(B) a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$$

$$(C) a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$$

$$(D) (1+2+3+\cdots+n)\times a_n$$

解析： $1\times(a_1-a_2)+2\times(a_2-a_3)+3\times(a_3-a_4)+4\times(a_4-a_5)+\cdots+n\times(a_{n-1}-a_n)$
 $=a_1-a_2+2a_2-2a_3+3a_3-3a_4+4a_4-4a_5+\cdots+na_{n-1}-na_n$
 $=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n$

(B) 25. A、B、C、D 四人作○×是非題，他們的答案如下表所示。

A 與 B 得 70 分，C 得 60 分，求 D 之得分。(答對一題得 10 分)

	第 1 問	第 2 問	第 3 問	第 4 問	第 5 問	第 6 問	第 7 問	第 8 問	第 9 問	第 10 問	分數
A	○	×	○	×	○	○	×	×	×	○	70
B	○	○	×	×	×	○	○	○	×	×	70
C	×	×	×	○	○	×	○	×	○	×	60
D	○	×	×	○	○	×	×	○	×	×	?

(A) 50

(B) 60 分

(C) 70 分

(D) 80 分

解析：A 與 B 每人答對 7 題，2 人合計答對 14 題。但兩人的答案只有 4 題相同，其餘的 6 題不同。後者（答案不同）的 6 題中必然有 6 個正解，因此前者（答案相同）的 4 題中有 8 個正解，即全部為正解。

這四題及其正解為第 1 題 (○)，第 4 題 (×)，第 6 題 (○)，第 9 題 (×)。

在 C 的答案中上述四題皆答錯了，由其得分為 60 可知其他六題他全答對了。

根據上述資料，D 答對的是第 1、2、3、5、9、10 題，故得分為 60。

	第 1 問	第 2 問	第 3 問	第 4 問	第 5 問	第 6 問	第 7 問	第 8 問	第 9 問	第 10 問	分數
A	○	×	○	×	○	○	×	×	×	○	70
B	○	○	×	×	×	○	○	○	×	×	70
C	×	×	×	○	○	×	○	×	○	×	60
D	○	×	×	○	○	×	×	○	×	×	?
正解	○	×	×	×	○	○	○	×	×	×	

→ 60 分

二、計算題（每題 25 分）

1. 找規則律。

【例】：

1		4
	2	
2		3

2		5
	19	
3		4

4		7
	?	
5		6

【解】： $1 \times 2 \times 3 - 4 = 2$ ， $2 \times 3 \times 4 - 5 = 19$ ， $4 \times 5 \times 6 - 7 = 113 \dots \dots$ 答

(1) 找出下列？是多少。

（提供 1 種解法得 10 分，提供 2 種不同解法得 15 分）

7		2
	6	
2		4

5		10
	20	
8		2

9		2
	?	
4		10

(2) 仿上自己創造題目並解答。

（至少 2 種+、-、 \times 、 \div 運算且答案是正整數，10 分）

解析：(1) 參考解答 $7 \times 2 - 4 \times 2 = 6$ ， $5 \times 8 - 2 \times 10 = 20$ ， $9 \times 4 - 10 \times 2 = 16$

另解 1. $(7-1) \times 2 - 2 - 4 = 6$

另解 2. $7 + 2 - 4 + 2 - 1 = 6$

$(5-1) \times 8 - 10 - 2 = 20$

$5 + 10 - 2 + 8 - 1 = 20$

$(9-1) \times 4 - 2 - 10 = 20$

$9 + 2 - 10 + 4 - 1 = 4$

(2)

5		4
	23	
3		2

7		5
	43	
4		3

10		7
	?	
2		3

$5 \times 3 + 4 \times 2 = 23$ ， $7 \times 4 + 5 \times 3 = 43$ ， $10 \times 2 + 7 \times 3 = 41$

2. 設正實數 a 之純小數部份為 b ，且 $a^2 + b^2 = 38$ 求：

(1) a 的整數部份 (10 分) (2) $a = ?$ (15 分)

解析：(1) $\because b$ 為純小數部份， $\therefore 0 \leq b < 1 \Rightarrow 0 \leq b^2 < 1$ ，且 $a^2 + b^2 = 38$

$\therefore 37 < a^2 \leq 38$ ， $\sqrt{37} < a \leq \sqrt{38}$ ， $\therefore a$ 的整數部份為 6。

(2) $a = 6 + b$ ， $a^2 + b^2 = 38$ ， $(6 + b)^2 + b^2 = 38$

$36 + 12b + 2b^2 = 38$ ， $2b^2 + 12b - 2 = 0$ ， $b^2 + 6b - 1 = 0$

$D = 6^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 40$ ， $b = \frac{-6 \pm \sqrt{40}}{2} = -3 \pm \sqrt{10}$ ，且 $\because 0 \leq b < 1$

$\therefore b = -3 + \sqrt{10}$ ， $a = 6 + (-3 + \sqrt{10}) = 3 + \sqrt{10}$

答：(1) 6 (2) $3 + \sqrt{10}$