Examinee 學生資料

Country/國家: ______ City/市(省): ______ School/學校: ______

Name/姓名: ______ Sex/性別: ______ Instructor/指導老師: ______

2019 第十五屆 IMC 國際數學交流活動(新加坡)

Fifteenth IMC International Mathematics Contest (Singapore)2019

高中一年級(決賽)試卷

考試時間:90 分鐘　卷面總分:100 分　得分:________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	C	C	B	D	B
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$(-2,-1)\cup(2,3)$	4034	$\frac{2019!!}{2018!!}$	$(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3})\cup(0,\frac{\pi}{3})$	$\frac{4\sqrt{2019}}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 已知三次多項式$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$滿足$P(0)=0$，$P(1)=\frac{1}{2}$，$P(2)=\frac{2}{3}$，$P(3)=\frac{3}{4}$，則 $P(4)=($　　$)$。 (A)0　(B)$\frac{1}{2}$　(C)$\frac{4}{5}$　(D)1

<解析>

$P(x)=P(0)\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}+P(1)\cdot\frac{x(x-2)(x-3)}{1\cdot(1-2)(1-3)}+P(2)\cdot\frac{x(x-1)(x-3)}{2\cdot(2-1)(2-3)}+P(3)\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{3\cdot(3-1)(3-2)}$

令$x=4$，帶入得解$P(4)=1$，選D。

2. 已知x, y, z均為大於1的正實數，且滿足$2\log_2 x=3\log_3 y=5\log_5 z$，則(　　)。
(A) x<y<z　(B)z<x<y　(C)y<z<x　(D)y<x<z

<解析>

令$t=2\log_2 x=3\log_3 y=5\log_5 z$，則$t>0$，且$x=(\sqrt{2})^t, y=(\sqrt[3]{3})^t, z=(\sqrt[5]{5})^t$，下面只需比較$\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{5}$的大小即可：

$(\sqrt{2})^6=8<(\sqrt[3]{3})^6=9\Leftrightarrow\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$，$(\sqrt{2})^{10}=32>(\sqrt[5]{5})^{10}=25\Leftrightarrow\sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$，

即$\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$，所以$y>x>z$，選 B。

3. 甲、乙、丙、丁四位同學參加數學競賽挑戰賽，最終評出第一、第二、第三和第四名。
甲同學說:我是第二名，乙是第三名；
乙同學說:我是第四名，丙是第二名；
丙同學說:我是第三名，丁是第二名；
丁同學說:我是第一名，乙是第三名。
已知四位同學每人都說對一半說錯一半，那麼丙是(　　)。
(A)第一名　(B)第二名　(C)第三名　(D)第四名

<解析>

假設甲是第二名，乙不是第三名
則乙不是第四名，丙也不是第二名
丙是第三名，丁不是第二名
則丁是第一名，乙不是第三名
依序丁甲丙乙，第三名是丙，選C。

4. 已知p、q為整數且滿足$p+q=2018$，關於x的方程$x^2+px+q=0$有整數根，則滿足條件的整數對(p,q)的個數為(　　)。 (A)0　(B)2　(C)4　(D)8

<解析>

$p+q=2018$，$x^2+px+q=0\Rightarrow x^2+px+2018-p=0\Rightarrow p=\frac{x^2+2018}{1-x}$，

$p=\frac{x^2+2018}{1-x}=\frac{x^2-2x+1+2x-2+2019}{1-x}=1-x+\frac{2019}{1-x}-2$，據題意知整數$x$滿足$(1-x)|2019$，由算術基本定理對2019 進行質因數分解可得$1-x=\pm1,\pm3,\pm673,\pm2019$，但$1-x=\pm1$與$1-x=\pm2019$對應情形相同，$1-x=\pm3$與$1-x=\pm673$對應情形也相同，故 p 只有 4 個解，選 C。

5. 若今天是星期日，則2^{2019}天之後是(　　)。
(A)星期六　(B)星期日　(C)星期一　(D)星期二

<解析>

$2^{2019}=2^3\cdot2^{2016}=8\cdot(2^6)^{336}=8(63+1)^{336}\equiv1(\bmod 7)$，故$2^{2019}$天之後是星期一，選 C。

6. What is the numerical value of $(1+\cos\frac{\pi}{5})(1-\cos\frac{2\pi}{5})$?
(A)$1+\frac{1}{\sqrt{5}}$　(B)$1+\frac{1}{4}$　(C)$1+\frac{1}{\sqrt{3}}$　(D)$1+\frac{1}{2}$

<解析>

$\left(1+\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)=1+\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$

$=1+2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=1+\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$

$=1+\frac{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=1+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{5}{4}$，選B。

7. 已知$x+\frac{1}{x}=1$，則$x^{2019}+\frac{1}{x^{2019}}$的值為(　　)。
(A)1　(B)-1　(C)2　(D)-2

<解析>

設$a_n=x^n+\frac{1}{x^n}$，由$x+\frac{1}{x}=1$得：$a_2=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=-1$，

所以$a_n=a_n\cdot a_1=(x^n+\frac{1}{x^n})(x+\frac{1}{x})=x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}+x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}=a_{n+1}+a_{n-1}$，

$\therefore a_{n+1}=a_n-a_{n-1}(n\geq2)$，

$\therefore a_3=a_2-a_1=-2, a_4=a_3-a_2=-1, a_5=a_4-a_3=1, a_6=a_5-a_4=2$，

$a_7=a_6-a_5=1=a_1, a_8=a_7-a_6=-1=a_2$，即$\{a_n\}$週期為 6，

所以$a_{2019}=x^{2019}+\frac{1}{x^{2019}}=a_3=-2$，選 D。

8. 已知a_k (k=1, 2, 3, …..,7)為和等於2019的7個非負實數，記 $M=max\{a_1+a_2+a_3,\ a_2+a_3+a_4,\ a_3+a_4+a_5,\ a_4+a_5+a_6,\ a_5+a_6+a_7\}$，求M的最小值 (　　)。 (A)$\frac{6057}{7}$ (B)$\frac{2019}{3}$ (C)$\frac{2019}{2}$ (D)$\frac{4038}{7}$

<解析>

假設$M\frac{2019}{3}{}_{min}$，則當 M 取最小值時，$a_1+a_2+a_3<\frac{2019}{3}, a_5+a_6+a_7<\frac{2019}{3}$，又$\sum_{i=1}^{7}a_i=2019$，所以此時$a_4>\frac{2019}{3}$，進而$M\ge a_3+a_4+a_5>\frac{2019}{3}$，矛盾；所以假設不成立，即 $M\frac{2019}{3}{}_{min}$。

取$a_1=a_4=a_7=\frac{2019}{3}$，其他$a_2=a_3=a_5=a_6=0$，此時$M=\frac{2019}{3}$，選 B。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 不等式 $\log_2(x^2-x-2)<8+x-x^2$的解集為_______。

<解析>

令$t=x^2-x-2$，則$log_2(x^2-x-2)<8+x-x^2 \Leftrightarrow log_2 t<6-t \Rightarrow 0<t<4$，解得原不等式解集為$(-2,-1)\cup(2,3)$.

2. 若正整數 n 使 $n[2020\sqrt{2017^2+1}]=\ 2020\ [n\sqrt{2017^2+1}]$成立，則符合要求的 n 共_______個。

<解析>

$2020\times2017<2020\sqrt{2017^2+1}<2020\times\sqrt{(2017+\frac{1}{2\times2017})^2}<2020\times2017+1$，

$\therefore [2020\sqrt{2017^2+1}]=2020\times2017$，原式等於

$2020\times2017\times n=2020[n\sqrt{2017^2+1}] \Leftrightarrow 2017n=[n\sqrt{2017^2+1}]$

$\Rightarrow 2017n\le n\sqrt{2017^2+1}<2017n+1 \Rightarrow n^2\cdot(2017^2+1)<(2017n+1)^2 \Rightarrow n(n-4034)<1$,

故n可取 1，2，3，…，4034 共 4034 個整數解.

3. 設數列$\{a_n\}$滿足$a_1=a_2=1$，且$a_{n+2}=\frac{1}{2a_{n+1}}+a_n$，n=1, 2, 3, ……，則$a_{2019}$=_______

<解析>

$a_{n+2}=\frac{1}{2a_{n+1}}+a_n \Rightarrow a_{n+2}a_{n+1}-a_{n+1}a_n=\frac{1}{2} \Rightarrow a_{n+1}a_n=a_2a_1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2}$，

$\therefore \frac{a_{n+2}a_{n+1}}{a_{n+1}a_n}=\frac{n+2}{n+1} \Rightarrow \frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{n+2}{n+1}$，

$\therefore \frac{a_{2019}}{a_{2017}}\cdot\frac{a_{2017}}{a_{2015}}\cdot\ldots\cdot\frac{a_3}{a_1}=\frac{2019}{2018}\cdot\frac{2017}{2016}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}=\frac{2019!!}{2018!!} \Rightarrow a_{2019}=\frac{2019!!}{2018!!}$

4. Let $8\sin^3\theta-tan^3\theta$>2019tan$\theta$ − 4038sinθ, where $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$. Find the range of (取值範圍) θ.

<解析>

$8\sin^3\theta-tan^3\theta>2019\,tan\,\theta-4038\sin\theta \Leftrightarrow (2\sin\theta)^3+2019\cdot(2\sin\theta)>tan^3\theta+2019\,tan\,\theta$,

注意到$f(t)=t^3+2019t$在 R 上單調遞增，所以

$f(2\sin\theta)>f(tan\,\theta) \Leftrightarrow 2\sin\theta>tan\,\theta \Leftrightarrow \frac{\sin\theta(2\cos\theta-1)}{\cos\theta}>0$，

又$\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，所以$\theta$的取值範圍是. $(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3})\cup(0,\frac{\pi}{3})$.

5. 已知正實數x, y滿足$2x^2$-xy-y2=2019，2x-y的最小值為______。

<解析>

$2x^2-xy-y^2=2019 \Leftrightarrow (2x+y)(x-y)=2019$，令$\begin{cases}2x+y=m\\x-y=n\end{cases}$，則$m,n>0$且$mn=2019$，解得$\begin{cases}x=\frac{m+n}{3}\\y=\frac{m-2n}{3}\end{cases}$，所以$2x-y=\frac{m+4n}{3}\ge\frac{2\sqrt{4mn}}{3}=\frac{4\sqrt{2019}}{3}$，當且僅當$\begin{cases}mn=2019\\m=4n\end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases}m=2\sqrt{2019}\\n=\frac{\sqrt{2019}}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{5\sqrt{2019}}{6}\\y=\frac{\sqrt{2019}}{3}\end{cases}$時取等.

6. 函數$y=f(5x-1)$的最小正週期等於1，且滿足$f(x^2+1)+f(2019-1007x)=3$對任意$x\in R$恆成立，則$f(2020)$=________。

<解析>

由函數$y=f(5x-1)$的最小正週期等於 1 可得$y=f(x)$的最小正週期為 5，在

$f(x^2+1)+f(2019-1007x)=3$中令$x=2$得$f(5)+f(5)=3 \Rightarrow f(5)=\frac{3}{2}$，

所以$f(2020)=f(5)=\frac{3}{2}$.

7. 若實數a>0, b>0，則$min\left\{max(a,\ b,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b})\right\}$=______。

<解析>

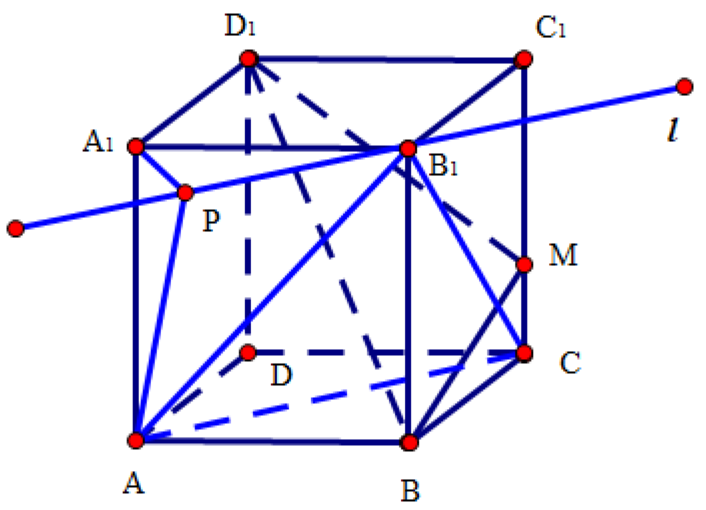
設$max(a,b,\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=m$，則$a\le m, b\le m, \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le m$，由$a\le m, b\le m$得：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{m}$

$\therefore m\ge\frac{2}{m} \Rightarrow m\ge\sqrt{2}$.故$min\{max(a,b,\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\}=min(m)=\sqrt{2}$

8. The edge length (棱長) of cube ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ is 1 unit, point M move along segment (線段) CC_1, another point P moving on plane (平面) $A_1B_1C_1D_1$, and AP $\perp$ plane MBD_1. Find the minimum (最小值) lengh (長度) of line segment AP.

<解析>

如圖，知$BD_1\perp$平面AB_1C，過B_1作直線 l 平行於 AC，則$l\subset$ 平面$A_1B_1C_1D_1$，所求點 P 應在直線l上，作$A_1P\perp l$於點 P，則由三垂線定理知$AP\perp l$，則 AP 長度最短，計算易知$AP=\sqrt{AA_1^2+A_1P^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.



三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 已知 a 是實數，函數 $f(x)=2ax^2+2x-3-a$，若函數 $y=f(x)$在[-1, 1]上有零點，求 a 的取值範圍。

<解析>

I.若$a=0$，則$f(x)=2ax^2+2x-3-a=2x-3$，此時$y=f(x)$在$[-1,1]$上無零點。

II.當$a\neq 0$時，若$\Delta=4-8a(-3-a)=0\Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$，此時$f(x)$在 R 上只有一個零點，此時只有$a=\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$時滿足函數$y=f(x)$在$[-1,1]$上有零點。

III.當$a\neq 0$時，若$\Delta=4-8a(-3-a)>0\Rightarrow a>\frac{-3+\sqrt{7}}{2}$ 或$a<\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$，此時$f(x)$在 R 上有兩個零點：

i.若$f(-1)=0\Rightarrow a=5$，符合題意，若$f(1)=0\Rightarrow a=1$，符合題意；

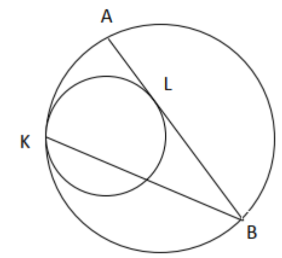
ii.若$y=f(x)$只有一個零點在$(-1,1)$上，則$\begin{cases}\Delta>0\\ f(-1)\cdot f(1)<0\end{cases}\Rightarrow 1<a<5$；

iii.若$y=f(x)$有兩個零點在$[-1,1]$上，則$\begin{cases}a>0\\ \Delta>0\\ -1<-\frac{2}{4a}<1\\ f(-1)\geq 0\\ f(1)\geq 0\end{cases}$或$\begin{cases}a<0\\ \Delta>0\\ -1<-\frac{2}{4a}<1\\ f(-1)\leq 0\\ f(1)\leq 0\end{cases}$，解得$a\geq 5$或$a<\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$。

綜上，a的取值範圍是$(-\infty,-\frac{3+\sqrt{7}}{2}]\cup[1,+\infty)$。

2. 兩圓內切於點 K，大圓的弦 AB 與小圓切於點 L，且$\overline{AL}$=10，若$\frac{\overline{AL}}{\overline{BK}}=\frac{2}{5}$，求$\overline{BL}$。

<解析>



如圖，作弦PQ及公切線MN.

則$\angle PQK=\angle PKM=\angle ABK$.

所以，$PQ//AB$，$\widehat{PL}=\widehat{QL}$.

因此，$\angle PKL=\angle QKL$，即KL是$\angle AKB$的角平分線.

由角平分線的性質知

$\frac{AL}{BL}=\frac{AK}{BK}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow BL=10\times\frac{5}{2}=25$.