

2020 第十六屆 IMC 國際數學交流活動(新加坡)
Sixteenth IMC International Mathematics Contest (Singapore)2020

高中一年級(決賽)試卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分 得分: _____

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	A	C	C	A	A	B
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	n^2+n	8190	240	80	$25\sqrt{3}$	$\frac{19}{33}$	$(3, -1)$	± 2

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. What is the solution of $2|x|-|x-1|<5$?

(A) $-6<x<4$ (B) $1\leq x<4$ (C) $-3<x<4$ (D) $-2\leq x<4$

<解析>

① $x<0$, $-2x+x-1<5$, $x>-6$

② $0\leq x<1$, $2x+x-1<5$, $3x<6$, $x<2$

③ $1\leq x$, $2x-x+1<5$, $x<4$

則取值範圍: $-6<x<4$, 選A。

2. 設 $(7.2)^x=(0.8)^y=3$, 求 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=?$

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

<解析>

$(7.2)^x=3 \rightarrow 7.2=3^{\frac{1}{x}}$

$(0.8)^y=3 \rightarrow 0.8=3^{\frac{1}{y}}$

$3^{\frac{1}{x}} \div 3^{\frac{1}{y}} = \frac{7.2}{0.8} = 9 = 3^2$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$, 選B。

3. 設 $\deg f(x) \geq 3$, 以 x^2-x+1 除 $f(x)$ 的餘式為 $2x-3$, 以 $x-1$ 除 $f(x)$ 的餘式為 1, 則 $f(x)$ 除以 $(x^2-x+1)(x-1)$ 所得的餘式為 _____。(A) $2x^2-1$ (B) $3x^2-1$ (C) $2x^2-x-1$ (D) $3x^2-x-1$

<解析>

$f(x)=(x^2-x+1)p(x)+2x-3$

$f(x)=(x-1)q(x)+1$

令 $f(x)=(x^2-x+1)(x-1)r(x)+m(x^2-x+1)+2x-3$

$\rightarrow f(1)=m \cdot (1-1+1)+2-3=1$, $m=2$, 餘式 $=2(x^2-x+1)+2x-3=2x^2-1$, 選A。

4. A is a positive irrational number, b is the decimal part, and $a+b^2=m$, m is a positive whole number. What is the value of b ? (A) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$ (C) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$

<解析>

令 a 的整數部分為 n , 即 $a=n+b$ 代入 $a+b^2=m$

得 $b^2+b=(m-n)$ 為一整數, 且 $0<b<1$, 所以 $0<b+b^2<2$

$\therefore b+b^2=1$, $b^2+b-1=0$, $b=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, 且 $b>0$, $b=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, 選C。

5. 某容器中有濃度 80% 的食鹽水 100 克, 今從此容器中倒出 40 克的食鹽水, 再倒入 40 克的純水於此容器中, 這樣叫操作一次, 反覆此操作, 問至少要操作幾次後, 容器中的食鹽水的濃度會小於 1%? ($\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$)

(A)7 (B)8 (C)9 (D)10

<解析>

設 a_n 表示操作 n 次後的食鹽水濃度

$a_1=80\% \times (1-\frac{40}{100})=80\% \times \frac{3}{5}$; $a_2=80\% \times (1-\frac{40}{100})^2=80\% \times (\frac{3}{5})^2$; ; $a_n=80\% \times (1-\frac{40}{100})^n=80\% \times (\frac{3}{5})^n$

且 $80\% \times (\frac{3}{5})^n < 1\% \rightarrow (\frac{3}{5})^n < \frac{1}{80}$

$\therefore n \log \frac{3}{5} < \log \frac{1}{80}$, $n(\log 3 - \log 5) < -\log 80$, $n(\log 3 - \log 5) < -(\log 10 + 3 \log 2)$

$\therefore n(0.4771 - 0.699) < -(1 + 3 \times 0.301) \rightarrow -0.2219n < -1.903$, $n > \frac{1.903}{0.2219} \approx 8.576$

則 n 至少 9 次, 選C。

6. 設 $f(x)=x^2-2ax+a$, 若任意實數 x , 恆使 $f(x)>-2$ 成立, 求實數 a 的範圍?

(A) $-1<a<2$ (B) $-2<a<1$ (C) $-1<a<3$ (D) $-2<a<3$

<解析>

$x^2-2ax+a>-2$, $x^2-2ax+a+2>0$

判別式 $D=(-2a)^2-4(a+2)<0$,

$a^2-a-2<0$, $(a-2)(a+1)<0$, $-1<a<2$

選A。

7. 若方程式 $(\log 2x) \cdot (\log 3x)=1$ 之二根為 α 、 β , 則 $\alpha \beta=?$

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $-\frac{1}{6}$ (C) 6 (D) -6

<解析>

原式 $=(\log x + \log 2)(\log x + \log 3)=1$

$(\log x)^2 + (\log 2 + \log 3) \log x + (\log 2 \log 3 - 1)=0$

令 $t = \log x$, $t^2 + (\log 2 + \log 3)t + (\log 2 \log 3 - 1)=0$

且兩根為 $\log \alpha$ 、 $\log \beta$

$\log \alpha + \log \beta = -(\log 2 + \log 3)$

$\log \alpha \beta = -\log 6$, $\log \alpha \beta = \log \frac{1}{6}$, $\alpha \beta = \frac{1}{6}$, 選A。

8. $f(x) = \frac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$, $x \in \mathbb{R}$, 若 $f(x)$ 最小值 a , 最大值 b , 則 $a+b=?$

(A)5 (B)6 (C)7 (D)8

<解析>

令 $y = \frac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$, $yx^2+yx+y=2x^2-x+2$

$(y-2)x^2+(y+1)x+(y-2)=0$

① $y-2=0 \rightarrow y=2, 3x=0, x=0$

② $y-2 \neq 0 \rightarrow (y-2)x^2+(y+1)x+(y-2)=0$ 是 x 的一元二次方程式, 有實根

$D=(y+1)^2-4(y-2)(y-2) \geq 0$

$-3y^2+18y-15 \geq 0, 1 \leq y \leq 5$

$\therefore y=f(x)$ 最小值 1, 最大值 5, 則 $a+b=1+5=6$, 選 B。

二、填充題(每題 5 分, 共 40 分)

1. The sequence $\langle a_n \rangle$ satisfying $a_1=2, a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n$. Find $a_n =$ _____.

<解析>

$\therefore a_{k+1} = \frac{k+2}{k} a_k, k=1, 2, 3, \dots$

$k=1, a_2 = \frac{3}{1} a_1$

$k=2, a_3 = \frac{4}{2} a_2$

$k=3, a_4 = \frac{5}{3} a_3$

\dots

$k=n-1, a_n = \frac{5}{3} a_{n-1}$

左式=右式 $\rightarrow a_n = a_1 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n+1}{n-1}$

$= a_1 \cdot \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = n^2 + n$

2. 等差數列 1、4、7、10、13、.....按右列規律排入 $A_1、A_2、A_3、\dots$ 之方陣中, 則 A_{20} 之方格中所有數字之總和為 _____。

<解析>

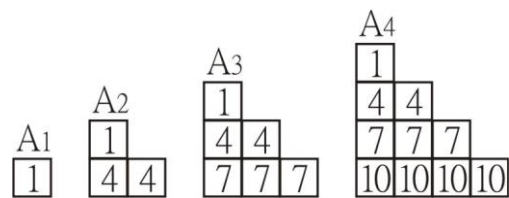
(1) 1、4、7、10、13、...

第 n 項為 $1+(n-1) \times 3 = 3n+2$

又 $n=20, a_{20} = 3 \times 20 + 2 = 58$

(2) 求 $1 \times 1 + 2 \times 4 + 3 \times 7 + \dots + 20 \times 58$

$= \sum_{k=1}^{20} k(3k-2) = 3 \sum_{k=1}^{20} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{20} k = 3 \times \frac{20 \times 21 \times 41}{6} - 2 \times \frac{20 \times 21}{2} = 8610 - 420 = 8190$



3. 4 out of 6 people will visit cities A, B, C, and D. Each city has to have one visitor and each visitor can only go visiting one city. Thus, Alex and Leo are not going to visit city D, then there are _____ types of visiting plans.

<解析>

6 人取 4 人任意安排-兩人之一去到城市 D

$P_4^6 - 2 \times P_3^5 = 360 - 120 = 240$ 種

4. 試求 $\frac{(1+2x)^5-1}{x}$ 展開式中, x^2 項的係數是 _____。

<解析>

設 x^3 項為 $(1+2x)^5$ 展開式中的第 $k+1$ 項

則 $C_k^5 (1)^{5-k} (2x)^k = 2^k \cdot C_k^5 \cdot x^k$

取 $k=3$, 係數 $= 2^3 \cdot C_3^5 = 80$

5. In $\triangle ABC$, $\overline{AC} = 10\sqrt{3}, \overline{AB} = 10, \angle B = 120^\circ$, find the area of $\triangle ABC$ is _____.

<解析>

$\triangle ABC$ 面積 $= \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3} \times \sin A$

且 $\frac{10\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{10}{\sin C} \rightarrow \sin C = \frac{10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

$\therefore \angle C = 30^\circ$ 或 150° (不合, 三角形內角和 $= 180^\circ$)

$\rightarrow \angle A = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

$\triangle ABC$ 面積 $= \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3} \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 25\sqrt{3}$

6. 某一工廠生產燈泡, 12 個裝成一盒。工廠品質檢驗的方法是從每盒中任取 4 個來檢查, 如有兩個或兩個以上是壞的, 則整盒淘汰。若某一盒有 5 個壞燈泡, 則這一盒會被淘汰的機率是 _____。

<解析>

$1 - \frac{C_0^5 \cdot C_4^7}{C_4^{12}} - \frac{C_1^5 \cdot C_3^7}{C_4^{12}} = 1 - \frac{1 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} - \frac{5 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}}{99 \times 5} = 1 - \frac{7}{99} - \frac{35}{99} = \frac{57}{99} = \frac{19}{33}$

7. 若直線 $L: x+2y-1=0$ 與圓 $C: (x-2)^2+(y+3)^2=5$ 相切於點 P , 則 P 點的坐標為 _____。

<解析>

直線 L 的斜率 $= -\frac{1}{2}$, 過圓 O 與點 P 的直線斜率為 m_a , 且 $m_a \times (-\frac{1}{2}) = -1, m_a = 2$

$y+3=2(x-2) \rightarrow 2x-y=7=0$

$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ 2x-y-7=0 \end{cases} \rightarrow x=3, y=-1, \text{ 即 } P(x_1, y_1) = P(3, -1)$

8. 設 k 為整數，且滿足 $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^k + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^k = 4$ ，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

<解析>

$$2+\sqrt{3} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^{-1}$$

$$\therefore (2+\sqrt{3})^{\frac{k}{2}} + (2+\sqrt{3})^{-\frac{k}{2}} = 4, \text{ 令 } x = (2+\sqrt{3})^{\frac{k}{2}} \rightarrow x + x^{-1} = 4$$

$$x + \frac{1}{x} = 4, x^2 - 4x + 1 = 0, x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\textcircled{1} x = (2+\sqrt{3})^{\frac{k}{2}} = 2+\sqrt{3}, \frac{k}{2} = 1, k = 2$$

$$\textcircled{2} x = (2+\sqrt{3})^{\frac{k}{2}} = 2-\sqrt{3}, \frac{k}{2} = -1, k = -2$$

則 $k = \pm 2$

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. (1) 分解 $x^4 + 4y^4$

(2) 證明有無窮多個自然數 a 具有下列的性質：

對任意自然數 n ， $z = n^4 + a$ 不是質數。

<解析>

$$\begin{aligned} (1) x^4 + 4y^4 &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) \end{aligned}$$

(2) 令 $a = 4k^4$ ， $k = 2, 3, 4, 5, \dots$

$$\text{則有 } z = n^4 + 4k^4 = (n^2 + 2k^2 + 2nk)(n^2 + 2k^2 - 2nk)$$

對於每個自然數 n ，如果 $k \geq 2$ ，得到

$$n^2 + 2k^2 + 2nk \geq n^2 + 2k^2 - 2nk = (n-k)^2 + k^2 \geq k^2 \geq 4$$

$\therefore n^2 + 2k^2 + 2nk$ 及 $n^2 + 2k^2 - 2nk$ 都是大於 1 的自然數

對無窮多的 $k (\geq 2)$ ，如取 $a = 4k^4$ ， $z = n^4 + a$ 不會是質數。

2. 有一種機器，每天要付維修費，在買回來以後的第 t 天，應該負的維修費是 $(t+500)$ 元(買來當天的維修費以 $t=0$ 計算)。購買機器時，花的費用是 50 萬元。

買回來後，過若干天就報廢。用多少天以後報廢最合算？

<解析>

① 利用 $a, b > 0 \rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (當 $a=b$ 時，等號成立)

② 設買來後過 t 天報廢，那麼所花的錢除去 50 萬的購買費用以外，還有買來當天和以後 $(t-1)$ 天的維修費

令平均每天損耗 y 元，總損耗 yt 元

$$yt = 500 + (500+1) + (500+2) + \dots + (500+t-1) + 500000$$

$$yt = \frac{t(500+500+t-1)}{2} + 500000, yt = \frac{t^2+999t}{2} + 500000$$

$$\textcircled{3} y = \frac{t+999}{2} + \frac{500000}{t} = \frac{t}{2} + \frac{999}{2} + \frac{500000}{t} \geq 2\sqrt{\frac{t}{2} \times \frac{500000}{t}} + \frac{999}{2}$$

當 $\frac{t}{2} = \frac{500000}{t}$ ， $t^2 = 1000000$ ， $t = 1000$ ， y 有最小值，則 1000 天