第十九屆IMC國際數學競賽台灣區複賽

Nineteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

國中三年級試卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分

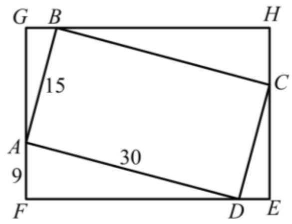
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：______________ 准考證號碼：______________ 試題總分：_______________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績!
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績!

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	A	A	C	D	A
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	100π	a=10 a=-6 (3 分/5 分)	y=-2(x-1)^2+2	$\frac{11}{6}$	$M\geq\frac{150}{11}$	$\sqrt{5}$	-15	17 或 18 (3 分/5 分)

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)



1. 如右圖，$ABCD$ 及 $EFGH$ 均為矩形，求$\overline{DE}$的長為何?
(A)4.5 (B)4 (C)3.5 (D)3

<解析>

∵△ECD~△FDA(AA 相似)

∴$\frac{\overline{DE}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$

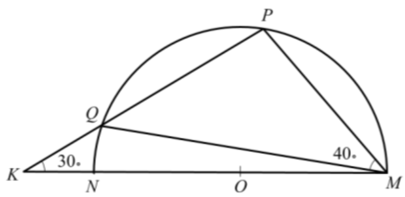
➔$\frac{\overline{DE}}{9}=\frac{15}{30}$，$\overline{DE}$=4.5，選 A。

2. What is the solution to the equation $\sqrt{x+7}$-x=1 with respect to x? (A)0 (B)1 (C)2 (D)3

<解析>

原式=$\sqrt{x+7}=1+x\to(\sqrt{x+7})^2=(1+x)^2$，$x+7=1+2x+x^2$

∴$x^2+x-6=0$，$(x+3)(x-2)=0$，x=2 或-3 (-3 不合)，選 C。



3. 如右圖，$\overline{MN}$是半圓的直徑，若∠K=30°，∠PMQ=40°，
則∠MPK=? (A) 70° (B) 90° (C) 95° (D) 100°

<解析>

∵$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{PM}-\overset{\frown}{QN})=30^\circ$ ➔ $\overset{\frown}{PM}-\overset{\frown}{QN}=60^\circ$……①

$\overset{\frown}{PM}+\overset{\frown}{QN}=180^\circ-40^\circ\times2=100^\circ$……②

①-②→$\overset{\frown}{QN}=20^\circ$

∠$MPK=(180^\circ+\overset{\frown}{QN})\div2=(180^\circ+20^\circ)=100^\circ$

選 D。

4. 計算$\sqrt{2020\times2021\times2022\times2023+1}-2021^2=$______. (A)2020 (B)2021 (C)2022 (D)2023

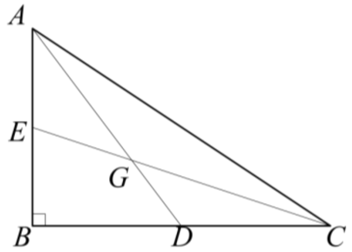
<解析>

令 a=2020，原式$=a(a+1)(a+2)(a+3)+1=a(a+3)(a+1)(a+2)=(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1$

令 $x=a^2+3a$，$(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1\to x(x+2)+1=x^2+2x+1=(x+1)^2$

$\therefore$原式$=\sqrt{(x+1)^2}-2021^2=\sqrt{(a^2+3a+1)^2}-2021^2=2020^2+3\times2020+1-2021^2$

$=(2020^2-2021^2)+6060+1=-4041+6061=2020$，選 A。



5. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，$\overline{AD}$、$\overline{CE}$交於 G 點，G 為重心，若$\overline{AC}=12$，則$\overline{AD}^2+\overline{CE}^2=$? (A)180 (B)200 (C)220 (D)240

<解析>

$\because\overline{AD}^2+\overline{CE}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2+\overline{BC}^2+\overline{BE}^2$

$=(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)+(\overline{BD}^2+\overline{BE}^2)=\overline{AC}^2+\overline{DE}^2$

$=\overline{AC}^2+(\frac{1}{2}\overline{AC})^2=\frac{5}{4}\times12^2=180$，選 A。

6. 已知 x、y 是實數，$\sqrt{3x+4}+y^2-6y+9=0$，則 $x+y=$? (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{7}{3}$

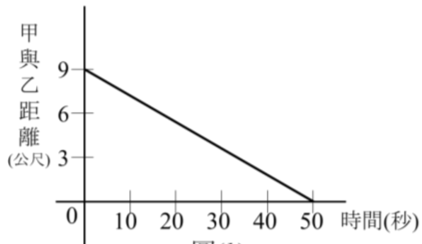
<解析>

原式$=\sqrt{3x+4}+(y-3)^2=0$，且 x、y 是實數

$\therefore 3x+4=0$ 且 $y-3=0$

$\therefore x=\frac{-4}{3}$ 且 $y=3\Rightarrow x+y=\frac{-4}{3}+3=\frac{5}{3}$，選 C。

圖(a)



圖(b)

7. 如右圖(a)，在同一直線上，甲自 A 點開始追趕等速度前進的乙，且圖(b)中表示兩人距離與所經時間的線型關係。若乙的速度為每秒 1.5 公尺，則經過 40 秒，甲自 A 點移動多少公尺? (A)60 (B)61.2 (C)66 (D)67.2

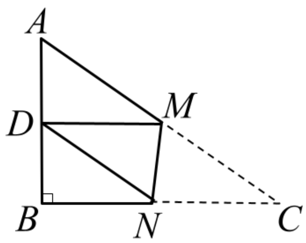
<解析>

①當時間=50 秒，甲和乙距離=0(即甲追上乙)

②1 秒，甲追乙=9÷50=0.18(公尺)→甲比乙 1 秒快

則甲的速度=1.5+0.18=1.68

③經過 40 秒追逐，甲自 A 點移動 1.68x40=67.2 公尺，選 D。



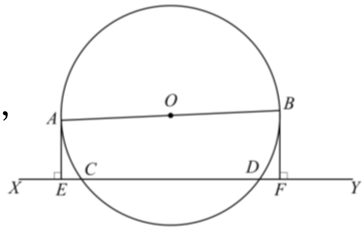
8. In Rt$\triangle ABC$ as shown, $\angle B=90^\circ$, $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$, fold (摺疊) $\triangle ABC$ so that point C coincides with (重合) the midpoint D of $\overline{AB}$ and the crease (摺痕) intersects $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ at point M and point N respectively. What is the length of $\overline{CN}$? (A) $\frac{10}{3}$ (B) $\frac{11}{3}$ (C) $\frac{13}{3}$ (D) $\frac{14}{3}$

<解析>

令$\overline{CN}=x$，$\overline{CN}=\overline{DN}=x$，$\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times4=2$，$\overline{BN}=\overline{BC}-\overline{CN}=6-x$

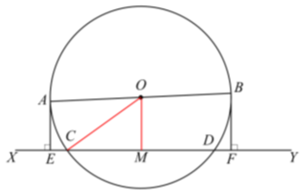
$\triangle DBN$ 是直角三角形$\Rightarrow 2^2+(6-x)^2=x^2$，$4+36-12x+x^2=x^2$，$12x=40$，$x=\frac{10}{3}$，選 A。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)



1. 如右圖，$\overline{AB}$為圓 O 的直徑，$\overline{AE}\perp\overline{XY}$，$\overline{BF}\perp\overline{XY}$，若$\overline{AE}=5$，$\overline{BF}=7$，$\overline{CD}=16$，求圓 O 的面積為________。

<解析>



過 O 作$\overline{OM}\perp\overline{CD}$，交$\overline{CD}$於 M 點，且連接$\overline{OC}$

$\therefore 2\overline{OM}=(\overline{AE}+\overline{BF})$，$\overline{OM}=(5+7)\div 2=6$

$\overline{CO}=\sqrt{\overline{CM}^2+\overline{OM}^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，圓 O 面積$=10^2\times\pi=100\pi$

2. Both roots of the equation $x^2+ax+a+6=0$ for x are integers. What are all possible values of a?

<解析>

公式解$=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4(a+6)}}{2a}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4a-24}}{2a}$

$a^2-4a-24$是完全平方數

①$a^2-4a-24=1$，$a^2-4a-25=0\rightarrow$不合

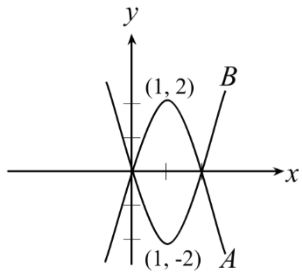
②$a^2-4a-24=4$，$a^2-4a-28=0\rightarrow$不合

③$a^2-4a-24=16$，$a^2-4a-40=0\rightarrow$不合

④$a^2-4a-24=25$，$a^2-4a-49=0\rightarrow$不合

⑤$a^2-4a-24=36$，$a^2-4a-60=0\rightarrow(a-10)(a+6)=0$，$a=10$ 或-6 (3 分/5 分)

3. 作二次函數 A 關於 x 軸對稱的二次函數 B，再將二次函數 B 向左平移 2 個單位，向上平移 1 個單位，得到的二次函數 C 的方程式是 $y=2(x+1)^2-1$，則二次函數 A 的方程式是________。



<解析>

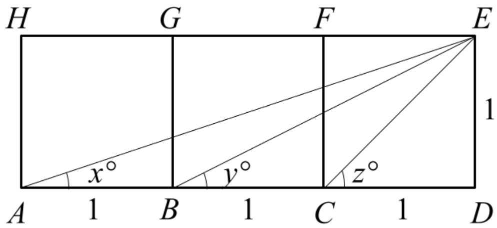
$y=(x+1)^2-1$➔頂點$(-1, -1)$，向右 2，向下 1➔B 的頂點$(-1+2, -1-1)=(1, -2)$

函數 B: $y=2(x-1)^2-2$ 且 函數 A 與函數 B 對稱 x 軸

$\therefore$函數 A 頂點$(1, 2)$ (開口向下)

$\therefore$函數 A: $y=-2(x-1)^2+2$

4. 如圖，四邊形 $ABGH$、$GBCF$、$FCDE$ 均為正方形，且$\angle EAD=x^\circ$，$\angle EBD=y^\circ$，$\angle ECD=z^\circ$，則 $\tan x^\circ+\tan y^\circ+\tan z^\circ=$________。



<解析>

$\tan x^\circ=\dfrac{\overline{ED}}{\overline{AD}}=\dfrac{1}{3}$，$\tan y^\circ=\dfrac{\overline{ED}}{\overline{BD}}=\dfrac{1}{2}$，$\tan z^\circ=\dfrac{\overline{ED}}{\overline{CD}}=\dfrac{1}{1}=1$

$\therefore\tan x^\circ+\tan y^\circ+\tan z^\circ=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{11}{6}$

5. $M=3x^2-8xy+9y^2-4x+6y+15$，$y\in R$，求 M 的範圍為________。

<解析>

$0=3x^2-8xy+9y^2-4x+6y+15-m$

$9y^2+(6-8x)y+[3x^2-4x+(15-m)]=0$

$D=(6-8x)^2-4\times 9\times[3x^2-4x+(15-m)]\geqq 0$

$36-96x+64x^2-108x^2+144x-36(15-m)\geqq 0$

$-44x^2+48x+36-540+36m\geqq 0$

$-44x^2+48x-504\geqq -36m$

$-11x^2+12x-126 \geqq -9m$

$11x^2-12x+126 \leqq 9m$

$11[x^2-\frac{12}{11}x+(\frac{6}{11})^2]+126-\frac{36}{11} \leqq 9m$

$11(x-\frac{6}{11})^2+126-\frac{36}{11} \leqq 9m$

$\frac{11}{9}(x-\frac{6}{11})^2+14-\frac{4}{11} \leqq m$

$\therefore$當 $x=\frac{6}{11}$，$\frac{150}{11} \leqq m$

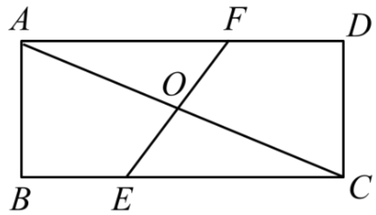
<另解>

$M=3(x-\frac{4}{3}y-\frac{2}{3})^2+\frac{11}{3}y^2+\frac{2}{3}y+\frac{41}{3}$

$\quad =3(x-\frac{4}{3}y-\frac{2}{3})^2+\frac{11}{3}(y+\frac{1}{11})^2+\frac{41}{3}-\frac{1}{33} \geqq \frac{450}{33}=\frac{150}{11}$

當 $y=-\frac{1}{11}$，$x=\frac{6}{11}$時，有最小值$\frac{150}{11}$➔$M \geqq \frac{150}{11}$ (慧燈老師提供)

6. The length of one side of the rectangle is 5, and the length of the other side is less than 4. Fold (摺疊) the rectangle so that the two opposite corner vertices (頂點) meet. As shown in the figure, if the length of the crease (摺痕) $\overline{EF}$ is $\sqrt{6}$, then the length of the other side is _____.



<解析>

$\overline{AE}=\overline{EC}=x$，$\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{CE}=5-x$，$\overline{AB}=y$

$\triangle ABE$，$y^2+(5-x)^2=x^2 \to y^2=(x+5-x)(x-5+x)=5(2x-5)$.....①

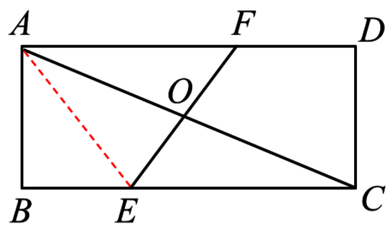
$\because \overline{AO}=\overline{CO}$，$\overline{AC} \perp \overline{EF}$，$\overline{AC}=\sqrt{y^2+5^2}$，$\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\sqrt{y^2+5^2}$

$\therefore \triangle AOE$，$x^2=(\frac{\sqrt{6}}{2})^2+(\frac{1}{2}\sqrt{y^2+5^2})^2 \to 4x^2=6+y^2+25$.....②

①代入② $\to 4x^2=6+10x-25+25$，$4x^2-10x-6=0$，$(4x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 或 3 (取正)

則 $y^2=5\times(6-5)$，$y=\pm\sqrt{5}$(取正)，即短邊的長度是$\sqrt{5}$



7. 設一等差級數前十項的和為 10，前二十項的和為 5，則此級數前三十項的和為 ________。

<解析>

$a_1+a_2+.....+a_{10}=10$

$a_1+a_2+.....+a_{20}=5 \to (a_1+a_2+.....+a_{10})+(a_{11}+.....+a_{20})=5$

$\therefore a_{11}+.....+a_{20}=5-10=-5$

則公差$=-5-10=-15$

$\therefore a_{21}+.....+a_{30}=(-5)+(-15)=-20$

$\therefore S_{30}=10+(-5)+(-20)=-15$

8. 成本價 3 元的髮夾按 7 元出售，能賣出 500 件，已知每漲價 1 元，銷售量就減少 20 件，為了得到 4200 元的利潤，售價應該為________元。

<解析>

設漲價為 x 元

$(500-20x)(7+x)-3\times(500-20x)=4200$

$3500-140x+500x-20x^2-1500+60x=4200$

$20x^2-420x+2200=0$，$x^2-21x+110=0$

$(x-10)(x-11)=0$

$\therefore x=10$ 或 $x=11$，則售價為 $7+10=17$ 或 $7+11=18$。

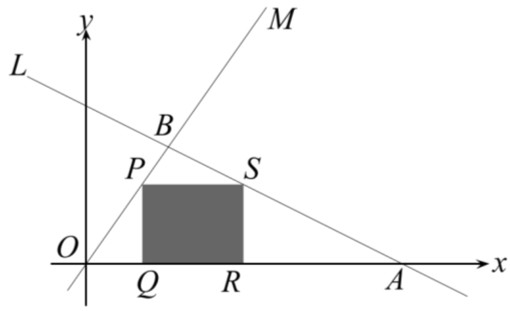
三、計算題(每題 10 分，共 20 分) ※未寫出計算過程不予計分

1. 如右圖，直線 L: $x+2y=10$ 與 x 軸交於 A，通過原點的直線 M: $y=2x$ 與 L 交於 B，$PQRS$ 是$\triangle BOA$ 的內接矩形，則

(1)求 B 點的坐標?

(2)若 P 點的 x 坐標為 t，則 S 點的坐標為何?

(3)承(2)，求 $PQRS$ 的最大面積，又此時 t 值為何?



<解析>

(1) $\because x+2y=10$ 且 $y=2x$

$\therefore x+4x=10$，$x=2\rightarrow y=4$

$\therefore B(2, 4)$

(2)當 $x=t$ 代入 $y=2x$，$y=2t$

$\therefore P(t, 2t)$

將 $y=2t$ 代入 $x+2y=10$

$\therefore x=10-4t$，$S(10-4t, 2t)$

(3)$\overline{PS}=10-4t-t=10-5t$，$\overline{PQ}=2t$，令 $PQRS$ 面積$=y$

$y=2t(10-5t)=-10t^2+20t$

$t=-\frac{b}{2a}=-\frac{20}{-20}=1$，當 $t=1$，y 有最大值$-10\times1^2+20\times1=10$

$\therefore t=1$，$PQRS$ 的最大面積$=10$

(2 分/3 分/5 分)

2. 解方程 $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$

<解析>

原式$=3(x^2+5x)+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$

令 $a=x^2+5x$

$3a+2\sqrt{a+1}=2$.....①，$2\sqrt{a+1}=2-3a$，$4(a+1)=(2-3a)^2$

$\therefore 4a+4=4-12a+9a^2\rightarrow 9a^2-16a=0$，$a(9a-16)=0$

$\therefore a=0$ 或 $a=\frac{16}{9}$

當 $a=0$ 代入①，$2\sqrt{1}=2$ (合理)，$x^2+5x=0$，$x(x+5)=0$，$x=0$ 或 $x=-5$

當 $a=\frac{16}{9}$代入①，$3\times\frac{16}{9}+2\sqrt{\frac{16}{9}+1}\neq2$ (不合)