

第十九屆  國際數學競賽台灣區複賽
Nineteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

國
中
二
年
級
試
卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：_____ 准考證號碼：_____ 試題總分：_____

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！								
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績！								
選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	A	A	C	A	D	C
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	67.2	$a=10$ $a=-6$ (3分/5分)	156	$\frac{16}{1-a^{16}}$	15	84	36	2046, 5643

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 若 $a+b+c=0$ ，求 $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}=?$ (A)2 (B)-2 (C)1 (D)-1

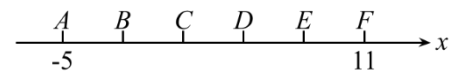
<解析>

$$\because (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca), \text{ 且 } a+b+c=0$$

$$\therefore 0 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab+bc+ca)$$

$$\text{故 } \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} = \frac{-2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca} = -2, \text{ 選 B。}$$

2. As shown in the figure, there are six point on the number axis (數軸) and $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}$, what is the nearest integer (整數) to the number represented (代表的數) by the point D? (A)4 (B)5 (C)6 (D)7



<解析>

$$11 - (-5) = 16$$

$$16 \div 5 = 3.2$$

$$D = 11 - 3.2 - 3.2 = 4.6 \div 5, \text{ 選 B。}$$

3. 設一等差級數前十項的和為 10，前二十項的和為 5，則此級數前三十項的和為何? (A)-15 (B)15 (C)-20 (D)20

<解析>

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 10, \text{ 且 } a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 5$$

$$\therefore a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20} = 5 - 10 = -5 \rightarrow \text{組距公差} = -5 - 10 = -15$$

$$a_{21} + a_{22} + \dots + a_{30} = (-5) + (-15) = -20$$

$$\therefore S_{30} = 10 + (-5) + (-20) = -15, \text{ 選 A。}$$

<另解>

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 10, \text{ 且 } a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 5$$

$$(a + a + 9d) \times 10 \div 2 = 10 \rightarrow 2a = 2 - 9d$$

$$(a + a + 19d) \times 20 \div 2 = 5 \rightarrow (2 - 9d + 19d) \times 20 \div 2 = 5, 10d = -1.5, d = -0.15$$

$$(a + a + 29d) \times 30 \div 2 = (2 - 9d + 29d) \times 15 = (2 - 20 \times 0.15) \times 15 = -15$$

4. 若 $a>0$ 、 $b<0$ ，則使 $|x-a|+|x-b|=a-b$ 成立的 x 取值範圍是_____。

(A) $b\leq x\leq a$ (B) $b<x<a$ (C) $x<b<a$ (D) $x\leq b\leq a$

<解析>

$$\because |x-a|+|x-b|=a-b=(a-x)+(x-b)$$

$$|x-a|=a-x \rightarrow a-x\geq 0 \rightarrow a\geq x, |x-b|=x-b \rightarrow x-b\geq 0 \rightarrow x\geq b$$

$\therefore b\leq x\leq a$ ，選 A。

5. 若 $p=\sqrt{7}-\sqrt{8}$ ， $q=\sqrt{6}-\sqrt{9}$ ， $r=\sqrt{5}-\sqrt{10}$ 比較 p 、 q 、 r 的大小？

(A) $r>p>q$ (B) $r>q>p$ (C) $p>q>r$ (D) $p>r>q$

<解析>

$$p^2=(\sqrt{7}-\sqrt{8})^2=15-2\sqrt{56}, q^2=(\sqrt{6}-\sqrt{9})^2=15-2\sqrt{54}, r^2=(\sqrt{5}-\sqrt{10})^2=15-2\sqrt{50}$$

$$\text{且 } p、q、r<0, r^2>q^2>p^2$$

$\therefore r<q<p \rightarrow p>q>r$ ，選 C。

6. 計算 $\sqrt{2020\times 2021\times 2022\times 2023+1}-2021^2=_____$. (A)2020 (B)2021 (C)2022 (D)2023

<解析>

$$\text{令 } a=2020, \text{原式}=a(a+1)(a+2)(a+3)+1=a(a+3)(a+1)(a+2)=(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1$$

$$\text{令 } x=a^2+3a, (a^2+3a)(a^2+3a+2)+1 \rightarrow x(x+2)+1=x^2+2x+1=(x+1)^2$$

$$\therefore \text{原式}=\sqrt{(x+1)^2}-2021^2=\sqrt{(a^2+3a+1)^2}-2021^2=2020^2+3\times 2020+1-2021^2$$

$$=(2020^2-2021^2)+6060+1=-4041+6061=2020, \text{選 A。}$$

7. 已知多項式 x^3+x^2+ax+7 除以 x^2-2x+b 所得到的商式為 $x+3$ ，餘式為 $-x+4$ ，求 $a\times b=?$

(A)4 (B)-4 (C)6 (D)-6

<解析>

$$x^3+x^2+ax+7=(x^2-2x+b)(x+3)+(-x+4)$$

令 $x=-3$ 代入

$$\therefore -27+9-3a+7=3+4, -3a=18, a=-6$$

$$x^3+x^2-6x+7+x-4=x^3+x^2-5x+3=(x^2-2x+b)(x+3)$$

$\therefore b=1$ ，則 $a\times b=(-6)\times 1=-6$ ，選 D。

8. It's know that x, y are real number, $\sqrt{3x+4}+y^2-6y+9=0$, then $x+y=_____$.

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{7}{3}$

<解析>

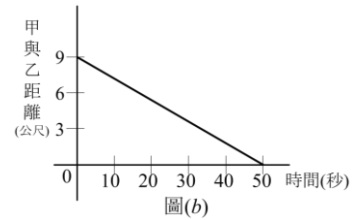
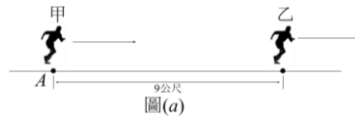
$$\text{原式}=\sqrt{3x+4}+(y-3)^2=0, \text{且 } x、y \text{ 是實數}$$

$$\therefore 3x+4=0 \text{ 且 } y-3=0$$

$$\therefore x=-\frac{4}{3} \text{ 且 } y=3 \rightarrow x+y=-\frac{4}{3}+3=\frac{5}{3}, \text{選 C。}$$

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 如右圖(a)，在同一直線上，甲自 A 點開始追趕等速度前進的乙，且圖(b)中表示兩人距離與所經時間的線型關係。若乙的速度為每秒 1.5 公尺，則經過 40 秒，甲自 A 點移動_____公尺。



<解析>

- ① 當時間=50 秒，甲和乙距離=0(即甲追上乙)
 ② 1 秒，甲追乙=9÷50=0.18(公尺)→甲比乙 1 秒快
 則甲的速度=1.5+0.18=1.68
 ③ 經過 40 秒追逐，甲自 A 點移動 1.68×40=67.2 公尺。

2. Both roots of the equation $x^2+ax+a+6=0$ for x are integers. What are all possible values of a ?

<解析>

$$\text{公式解} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(a+6)}}{2a} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4a - 24}}{2a}$$

$a^2 - 4a - 24$ 是完全平方數

- ① $a^2 - 4a - 24 = 1$ ， $a^2 - 4a - 25 = 0$ → 不合
 ② $a^2 - 4a - 24 = 4$ ， $a^2 - 4a - 28 = 0$ → 不合
 ③ $a^2 - 4a - 24 = 16$ ， $a^2 - 4a - 40 = 0$ → 不合
 ④ $a^2 - 4a - 24 = 25$ ， $a^2 - 4a - 49 = 0$ → 不合
 ⑤ $a^2 - 4a - 24 = 36$ ， $a^2 - 4a - 60 = 0$ → $(a-10)(a+6) = 0$ ， $a=10$ 或 -6 (3 分/5 分)

3. 一個正整數 n ，若加上 168 是一個完全平方數。若加上 100 又得到另一個完全平方數，試求這個正整數是_____。

<解析>

$$n+168=a^2 \dots\dots\dots ①$$

$$n+100=b^2 \dots\dots\dots ②$$

$$① - ② \rightarrow a^2 - b^2 = 68$$

$$(a+b)(a-b) = 68 = 1 \times 68 = 2 \times 34 = 4 \times 17$$

$$\therefore a+b=34, a-b=2 \rightarrow a=18, b=16$$

$$\therefore n+168=18^2=324, n=324-168=156$$

4. 化簡 $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} =$ _____。

<解析>

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} = \frac{1+a+1-a}{(1-a)(1+a)} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} = \frac{2}{1-a^2} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8}$$

$$= \frac{2+2a^2+2-2a^2}{(1-a^2)(1+a^2)} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} = \frac{4}{1-a^4} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} = \frac{4+4a^4+4-4a^4}{(1-a^4)(1+a^4)} + \frac{8}{1+a^8} = \frac{8}{1-a^8} + \frac{8}{1+a^8} = \frac{16}{1-a^{16}}$$

5. 甲、乙、丙、丁、戊五人各站在不同的位置上，已知乙在甲的正西方 2 公尺處，丙在甲的正東方 3 公尺處，丁在甲的正北方 6 公尺處，若戊在丙的正北方 m 公尺處，使得乙、丁、戊的位置恰在一直線上，則 $m=$ _____。

<解析>

假設甲為(0, 0)，則丁(0, 6)、丙(3, 0)，乙(-2, 0)

(0, 6)代入 $y=ax+b \rightarrow b=6$

(-2, 0)代入 $y=ax+b \rightarrow -2a+6=0, a=3$

\therefore 直線方程式: $y=3x+6$

$x=3, y=3 \times 3+6=15$

故丙(3, 15)，即 $m=15$

6. 設 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$ 均為自然數，且 $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_6 < x_7$ ，又 $x_1+x_2+x_3+\dots+x_6+x_7=159$ ，則 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的最大值是_____。

<解析>

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4$ 要最大值 $\rightarrow x_5+x_6+x_7$ 要最小值

令 $x_7=a, x_6=a-1, x_5=a-2, x_4=a-3, x_3=a-4, x_2=a-5, x_1=a-k$

$\therefore a+(a-1)+(a-2)+(a-3)+(a-4)+(a-5)+(a-k)=159$

$\therefore 7a-15-k=159, 7a=174+k$

當 $a=26, k=8$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=(26-8)+(26-5)+(26-4)+(26-3)=18+21+22+23=84$

7. 學生想知道王老師的年齡，王老師笑著說：「你們猜猜看，我現在的年齡的二位數字對調後，用 3 去除再加上 15，就是我的年齡了！」則王老師的年齡是_____歲。

<解析>

假設王老師的年齡的個位數為 x ，十位數為 y

$10y+x=\frac{10x+y}{3}+15, 30y+3x=10x+y+45$

$\therefore -7x+29y=45$ ，當 $y=3$ 代入

$-7x+29 \times 3=45, x=6$

故現年= $3 \times 10+6=36$

8. There is a four-digit number \overline{abcd} that is a multiple of 11, $b+c=2a$, and the two-digit number \overline{bc} is a perfect square number. This four-digit number is _____.

<解析>

\therefore 此四位數是 11 的倍數， $a+c-(b+d)=0$ 或 11 的倍數

且 bc 是完全平方數， $bc=01、04、09、16、25、36、49、64、81$

\therefore 當 $b+c=0+4 \rightarrow a=2$ ； $b+c=6+4 \rightarrow a=5$

① $a=2, b=0, c=4, d=6$

② $a=5, b=6, c=4, d=3$

則此四位數= 2046 或 5643 (寫一個或兩個都給 5 分)

三、計算題(每題 10 分，共 20 分) ※未寫出計算過程不予計分

1. 甲、乙二人合作完成一件工程 4 天可完成，甲獨作比乙獨作早 6 天完工，問甲、乙二人獨作各需幾天完成？

<解析>

設甲獨作需 x 天可完成，則乙獨作需 $x+6$ 天可完成

甲一天作 $\frac{1}{x}$ ，乙一天可 $\frac{1}{x+6}$ $\rightarrow 4 \times (\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6}) = 1$

$$4(x+6)+4x=x(x+6)$$

$$x^2-2x-24=0$$

$$(x-6)(x+4)=0$$

$$x=6 \text{ 或 } x=-4(\text{不合}), x+6=6+6=12$$

\therefore 甲需要 6 天，乙需要 12 天。

2. 已知: $b < c$ ， $1 < a < b+c < a+1$ ，求證: $b < a$

<解析>

因為 $b < c$ ，所以 $2b < b+c$ ，所以由 $b+c < a+1$ 得 $2b < a+1$ ，

所以由 $1 < a$ 得 $1+a < 2a$ ，所以 $2b < 1+a < 2a$ ，即 $b < a$ 成立。