第十九屆IMC國際數學競賽台灣區複賽
Nineteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

高中二年級試卷

考試時間:90 分鐘　卷面總分:100 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：______________ 准考證號碼：______________ 試題總分：_______________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績!
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績!

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	C	D	B	B	B	D
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	3	3	$-x^2+x+2$	$\frac{3}{5}$	(40, 1)	$3\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	3

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. Suppose a and b are positive real numbers. If $\log_7 a=11$ and $\log_7 b=13$ are known, then the value of $\log_7(a+b)$ is closest to which of the following options? (A)12 (B)13 (C)14 (D)23

<解析>

$\log_7 a=11\to a=7^{11}$，$\log_7 b=13\to b=7^{13}$

$a+b=7^{11}+7^{13}=7^{11}(1+7^2)=50\times7^{11}\to\log_7(a+b)=\log_7 50+\log_7 7^{11}\fallingdotseq2+11=13$

選 B。

2. Solving the inequality $|x+1|<|2x-4|$, what is the range of x? (A) $x>5$ or $x<1$ (B) $1<x<5$ (C) $x>4$ or $x<1$ (D) $1<x<4$

<解析>

$|x+1|<|2x-4|\to(x+1)^2<(2x-4)^2$，$x^2+2x+1<4x^2-16x+16$

$3x^2-18x+15>0$，$x^2-6x+5>0$

$(x-5)(x-1)>0$，則 $x<1$ 或 $x>5$，選 A。

3. $\frac{1}{1}$、$\frac{2}{1}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{1}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{4}{1}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{4}$、…… . What is the 150th item in the sequence? (A) $\frac{5}{13}$ (B) $\frac{6}{13}$ (C) $\frac{4}{14}$ (D) $\frac{5}{14}$

<解析>

①將數列分組 ($\frac{1}{1}$)、($\frac{2}{1}$、$\frac{1}{2}$)、($\frac{3}{1}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{1}{3}$)、……

故$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}\le150$，$k(k+1)\le300$

$\because 16\times17=272$，$17\times18=306$

$\therefore k=16$

②$1+2+3+4+\ldots..+16=136$

$150-136=14$

③ a_{150}在第 17 組第 14 個($\frac{17}{1}$、$\frac{16}{2}$、$\frac{15}{3}$、…、$\frac{4}{14}$)

$\therefore$選 C。

4. 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚共七人排成一列，甲、乙相鄰，甲、丙不相鄰，方法共有幾種? (A)800 (B)900 (C)1000 (D)1200

<解析>

甲乙▲丁▲戊▲己▲庚▲

丙有五個位置可以放

方法:5!x5=600 種

▲乙甲丁▲戊▲己▲庚▲

丙有五個位置可以放

方法:5!x5=600 種

∴600+600=1200，選 D。

5. 將報紙攤開在地面，對折依次後版面減半，再對折版面又縮成原來的 $\frac{1}{4}$ 倍，……….，如此繼續下去，問至少要對摺幾次，其厚度方可達到地球與太陽的距離? (假設報紙 100 張可疊高 1 公分，地球到太陽的距離為 14549 萬公里，log1.455=0.1629，log2=0.3010) (A)50 (B)51 (C)52 (D)53

<解析>

報紙 1 張厚度: 1÷100=0.01cm

對折 1 次厚→0.01x2

對折 2 次厚→$0.01\text{x}2\text{x}2=0.01\text{x}2^2$

∴對折 n 次→$0.01\times 2^n \geq 14549\times 10^4\times 10^3\times 10^2 \Rightarrow 2^n \geq 1.4549\times 10^{15}$

∴$\log 2^n \geq \log(1.4549\times 10^{15}) \to n\log 2 \geq 15+\log 1.4549 \to n\times 0.3010 \geq 15.1629$

∴$n \geq \frac{15.1629}{0.3010} \fallingdotseq 50.4$，$n=51$，選 B。

6. 空間中 O 為原點，且 $A(1995, 1996, 1995^2)$、$B(2010, 2011, 2010^2)$、$C(2012, 2013, 2012^2)$，試求以$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$所張開之平行六面體的體積為何? (A)500 (B)510 (C)520 (D)530

<解析>

$$\left\|\begin{matrix} 1995 & 1996 & 1995^2 \\ 2010 & 2011 & 2010^2 \\ 2012 & 2013 & 2012^2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1995 & 1 & 1995^2 \\ 2010 & 1 & 2010^2 \\ 2012 & 1 & 2012^2 \end{matrix}\right\|$$

$=\left|1995\cdot 2012^2+2010\cdot 1995^2+2012\cdot 2010^2-1995^2\cdot 2012-2010^2\cdot 1995-2012^2\cdot 2010\right|$

$=\left|2012^2(1995-2010)+2010^2(2012-1995)+1995^2(2010-2012)\right|$

$=\left|2012^2(-15)+2010^2(17)+1995^2(-2)\right|$

$=\left|2010^2\times 15-2012^2\times 15+2010^2\times 2-1995^2\times 2\right|$

$=\left|(2010^2-2012^2)\times 15+(2010^2-1995^2)\times 2\right|$

$=|(2012+2010)(2012-2010)\times 15+(2010+1995)(2010-1995)\times 2|$

$=|4022\times(-2)\times 15+4005\times 15\times 2|=|30(-4022+4005)|=510$

選 B。

7. x 是實數，則 $\frac{1-2^{x+1}}{1+2^x}$ 的值有可能是下列哪一個數? (A) $\frac{6}{5}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) -2

<解析>

假設 $2^x=y$ ➔ 令 $\frac{1-2^{x+1}}{1+2^x}=\frac{1-2^x\times 2}{1+2^x}=\frac{1-2y}{1+y}=k$

$1-2y=k(y+1)$

$1-2y=ky+k$

$1-k=(k+2)y$

$\therefore y=\frac{1-k}{k+2}>0\to(1-k)(k+2)>0$，$(k-1)(k+2)<0$，則$-2<k<1$，選 B。

8. 解不等式$\log_2(\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 x))\ge 0$，則 x 的範圍為?

(A) $1<x\le\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}<x\le 2$ (C) $\sqrt[4]{2}<x\le\sqrt{2}$ (D) $1<x\le\sqrt[4]{2}$

<解析>

$\log_2(\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 x))\ge 0=\log_2 1\to\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 x)\ge 1=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}\to 0<\log_2 x\le\frac{1}{4}$，$\log_2 2^0<\log_2 x\le\log_2 2^{\frac{1}{4}}$

➔$1<x\le\sqrt[4]{2}$

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 設 x、y 是實數，且$1.5^x=(0.0015)^y=10$，求 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ 之值是________。

<解析>

$1.5^x=10\ \to\ 1.5=10^{\frac{1}{x}}$ ………①

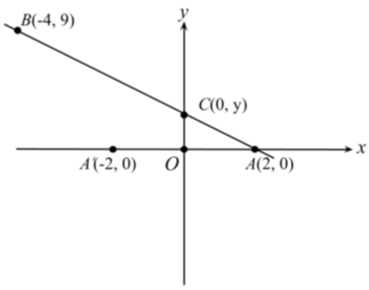
$(0.0015)^y=10\ \to\ 0.0015=10^{\frac{1}{y}}$ ………②

$\frac{①}{②}$ 得 $\frac{1.5}{0.0015}=10^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$ ➔ $10^3=10^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

$\therefore\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$

2. In triangle ABC, $A(-2, 0)$, $B(-4, 9)$, $C(0, y)$, want to minimize the perimeter of triangle ABC, and the value of y at this time is________.

<解析>



$\because\overline{AB}=\sqrt{(-2+4)^2+(0-9)^2}=\sqrt{85}$ 為固定邊長

且 $C(0, y)$為 y 軸上的點，使△ABC 周長最小

$\overline{AB}+\overline{BC}$ 最小(作 A 對 y 軸之對稱點 A'，使 B、C、A' 共線)

$A(-2, 0)\to A'(2, 0)$

$m_{\overleftrightarrow{A'B}}=m_{\overleftrightarrow{A'C}}$

$\therefore\frac{0-9}{2-(-4)}=\frac{0-y}{2-0}\ \to\ y=3$。

3. 多項式 $f(x)$除以 x^2+x+1 之餘式為 $2x+3$，除以 $x-3$ 之餘式為-4，求 $f(x)$除以$(x^2+x+1)\,(x-3)$之餘式為________。

<解析>

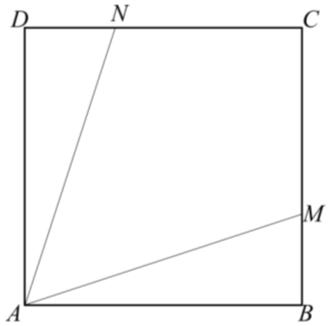
$f(x)=(x^2+x+1)(x-3)Q(x)+(x^2+x+1)\cdot A+2x+3$……①

$f(x)=(x-3)P(x)-4$ ➔ $f(3)=-4$ 代入①

$f(3)=13\cdot A+6+3=-4\rightarrow A=-1$

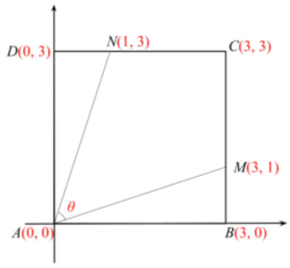
餘式$=(x^2+x+1)\cdot(-1)+2x+3=-x^2+x+2$

4. 如右圖，正方形 $ABCD$，$\overline{DN}:\overline{CN}=1:2$，$\overline{BM}:\overline{CM}=1:2$，若$\overrightarrow{AM}$與$\overrightarrow{AN}$夾角為 θ，求 $\cos\theta=$________。



<解析>

建立坐標系



$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{AN}|}=\dfrac{3+3}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{3}{5}$

5. 若$20^{30}+30^{20}$是 n 位正整數且首位數字為 a，則數對(n, a)= ________。

<解析>

$\log 20^{30}=30(1+\log 2)\approx 39.03$

20^{30}是 40 位正整數且首位數字為 1

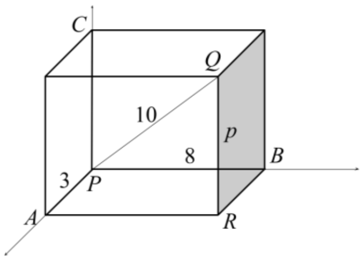
同理 $\log 30^{20}=20(1+\log 3)\approx 29.542$

$\therefore 30^{20}$是 30 位正整數且首位數字為 3

$\therefore 20^{30}+30^{20}$是 40 位正整數且首位數字為 1

$\therefore$數對$(n, a)=(40, 1)$

6. 設$\overline{PQ}=10$，若$\overline{PQ}$在 x 軸之正射影長為 3，在 y 軸之正射影長為 8，在 z 軸之正射影長為 p，則 $p=$________。



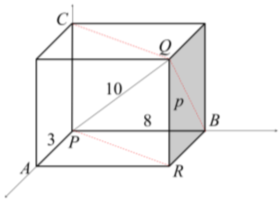
<解析>

$\because \overline{PA}=\overline{BR}=3$，$\overline{PB}=8$

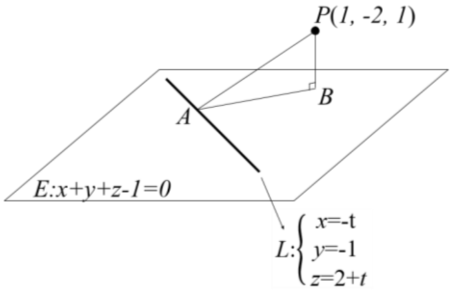
△PRB 中，$\overline{PR}^2=3^2+8^2=73$

又$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2+p^2$，其中$\overline{PC}=\overline{RQ}=p$

$\therefore 10^2=73+p^2$，$p^2=27$，$p=3\sqrt{3}$



7. 已知直線 $L:\begin{cases} x=-t \\ y=-1 \\ z=2+t \end{cases}$，$t\in R$ 在平面 $E:x+y+z-1=0$，設 $P(1, -2, 1)$為平面 E 外一點且在直線 L 與平面 E 的垂足分別為 A、B，求$\overline{AB}$的長為_______。



$\vec{L}=(-1, 0, 1)$

<解析>

①$P(1, -2, 1)$在 $L:\begin{cases} x=-t \\ y=-1 \\ z=2+t \end{cases}$，$t\in R$ 之投影點為 A$(-s, -1, 2+s)$，S 為定值

➔$\overrightarrow{PA}=(-s-1, 1, 1+s)$，且$\overrightarrow{PA}\perp(-1, 0, 1)=\vec{L}$

➔$s+1+0+1+s=0$，$s=-1$

$\therefore \overrightarrow{PA}=(0, 1, 0)$，$P$ 到 L 的距離為$|\overrightarrow{PA}|=1$

② P 到平面 E 的距離$=\dfrac{|1-2+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

③由三垂線定理得知: $\overrightarrow{BA}\perp L$於 A

則$\triangle PAB$ 中，$\overline{PA}=1$，$\overline{PB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle PBA=90°$，$\therefore \overline{AB}=\sqrt{\overline{PA}^2-\overline{PB}^2}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

8. 當 $b=\dfrac{10^{20000}}{10^{100}+3}$，則 b 之個位數字為_______。

<解析>

① $b=\dfrac{10^{20000}}{10^{100}+3}=\dfrac{(10^{100})^{200}-3^{200}}{10^{100}+3}+\dfrac{3^{200}}{10^{100}+3}=\dfrac{(10^{100})^{200}-3^{200}}{10^{100}+3}+\dfrac{9^{100}}{10^{100}+3}$，$0<\dfrac{9^{100}}{10^{100}+3}<1$ (小數部分)

$\therefore$b 的整數部分$=\dfrac{(10^{100})^{200}-3^{200}}{10^{100}+3}$

②令 $10^{100}=t$ ➔ b 的整數部分$=\dfrac{t^{200}-3^{200}}{t+3}=\dfrac{(t^2)^{100}-9^{100}}{t+3}=\dfrac{(t^2-9)[(t^2)^{99}+.....+(t^2\cdot 9^{98}+9^{99}]}{t+3}$

$=(t-3)[(t^2)^{99}+\ldots\ldots+t^2\cdot 9^{98}+9^{99}]=(100\ldots\ldots0-3)[\square\square\ldots\ldots00+9^{99}]=(\ldots\ldots7)(\ldots\ldots9)=\ldots\ldots3$

三、計算題(每題 10 分，共 20 分) ※未寫出計算過程不予計分

1. 解$\sqrt[3]{37+x}-\sqrt[3]{x}=1$。

<解析>

令$\sqrt[3]{37+x}=u$，$-\sqrt[3]{x}=v$ ➔ $37+x=u^3$，$-x=v^3$

①$u+v=1$

②$u^3+v^3=37$

且 $u^3+v^3=(u+v)^3-3uv(u+v)$

$\therefore 37=1-3uv\rightarrow uv=-12$

得出 $u=4$，$v=-3$ 或 $u=-3$，$v=4$

$\therefore x=27$ 或 $x=-64$

2. 一圓形游泳池設其圓心為 O，若銳角△ABC 內接於此圓，因△ABC 內部水較深兒童不可入內，設定$\overline{AB}$=10，$\overline{BC}$=12，∠BOC=2∠AOB，試求△ABC 的外接圓半徑為多少?

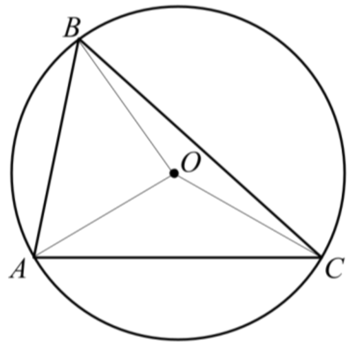
<解析>

①

∵∠BAC、∠ACB 是圓周角，又∠BOC=2∠AOB

令∠$ACB=\theta$，則∠$AOB=2\theta$

→∠$BOC=2\times2\theta=4\theta$，∠$BAC=2\theta$



②設△ABC 外接圓半徑為 R

由正弦定理: $\frac{10}{\sin\theta}=\frac{12}{\sin2\theta}=2R$，$\frac{10}{\sin\theta}=\frac{12}{2\sin\theta\cos\theta}=2R$

∴$\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\frac{4}{5}$ → $\frac{10}{\frac{4}{5}}=2R$，$R=\frac{25}{4}$