第十九屆IMC國際數學競賽台灣區複賽

Nineteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

高中一年級試卷

考試時間:90 分鐘　卷面總分:100 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：＿＿＿＿＿＿　准考證號碼：＿＿＿＿＿＿　試題總分：＿＿＿＿＿＿

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績!
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績!

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	C	D	A	A	B	B
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	3	3	$-x^2+x+2$	78	$\sqrt{13}$	2870	(1, 2, 3)	3

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. Suppose a and b are positive real numbers. If $\log_7 a=11$ and $\log_7 b=13$ are known, then the value of $\log_7(a+b)$ is closest to which of the following options? (A)12 (B)13 (C)14 (D)23

<解析>

$\log_7 a=11\rightarrow a=7^{11}$，$\log_7 b=13\rightarrow b=7^{13}$

$a+b=7^{11}+7^{13}=7^{11}(1+7^2)=50\times7^{11}\rightarrow\log_7(a+b)=\log_7 50+\log_7 7^{11}\fallingdotseq 2+11=13$

選 B。

2. Solving the inequality $|x+1|<|2x-4|$, what is the range of x? (A) $x>5$ or $x<1$ (B) $1<x<5$ (C) $x>4$ or $x<1$ (D) $1<x<4$

<解析>

$|x+1|<|2x-4|\rightarrow(x+1)^2<(2x-4)^2$，$x^2+2x+1<4x^2-16x+16$

$3x^2-18x+15>0$，$x^2-6x+5>0$

$(x-5)(x-1)>0$，則 $x<1$ 或 $x>5$，選 A。

3. $\frac{1}{1}$、$\frac{2}{1}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{1}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{4}{1}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{4}$、…… . What is the 150th item in the sequence? (A) $\frac{5}{13}$ (B) $\frac{6}{13}$ (C) $\frac{4}{14}$ (D) $\frac{5}{14}$

<解析>

①將數列分組 ($\frac{1}{1}$)、($\frac{2}{1}$、$\frac{1}{2}$)、($\frac{3}{1}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{1}{3}$)、……

故$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}\leq150$，$k(k+1)\leq300$

$\because 16\times17=272$，$17\times18=306$

$\therefore k=16$

②$1+2+3+4+\ldots\ldots+16=136$

$150-136=14$

③ a_{150}在第 17 組第 14 個($\frac{17}{1}$、$\frac{16}{2}$、$\frac{15}{3}$、…、$\frac{4}{14}$)

∴選 C。

4. 等比級數，前 n 項之和為 48，前 $2n$ 項之和為 60，前 $3n$ 項之和為? (A)80 (B)72 (C)70 (D)63

<解析>

設首項a_1，公比r

$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=48$........①

$S_{2n}=\frac{a_1(1-r^{2n})}{1-r}=60$........②

$\frac{②}{①}=\frac{1-r^{2n}}{1-r^n}=1+r^n=\frac{5}{4}$ ➔ $r^n=\frac{1}{4}$

代入①得 $\frac{a_1}{1-r}=64$

$\therefore S_{3n}=\frac{a_1(1-r^{3n})}{1-r}=64\cdot[1-(\frac{1}{4})^3]=63$，選 D。

5. 已知等比級數 $S=1+7+7^2+7^3+\cdots\cdots+7^{11}+7^{12}$，$\log7=0.8451$，若 S 是 a 位數，且 S 的最高位數字為 b，則 $a+b$=? (A)12 (B)13 (C)14 (D)15

<解析>

$S=\frac{1\cdot(7^{13}-1)}{7-1}=\frac{7^{13}-1}{6}$

$\log S\approx\log\frac{7^{13}}{6}=13\log7-\log2-\log3=13\times0.8451-0.3010-0.4771=10.2080=10+0.2082$

S 為 11 位數且 S 的最高位數字為 1 $\because\log1<0.2082<\log2$

$\therefore a=11$，$b=1$，則 $a+b=12$，選 A。

6. 計算$(\sqrt{5}+1)^{2022}-2\left(\sqrt{5}+1\right)^{2021}-4\left(\sqrt{5}+1\right)^{2020}+2023$=? (A)2023 (B) $\sqrt{5}+2023$ (C)2024 (D)$\sqrt{5}+2024$

<解析>

令 $x=(\sqrt{5}+1)^{2020}$

原式= $x\cdot(\sqrt{5}+1)^2-2(\sqrt{5}+1)^1x-4x+2023=x([(\sqrt{5}+1)^2-2(\sqrt{5}+1)-4]+2023=x\cdot[0]+2023=2023$

選 A。

7. x 是實數，則 $\frac{1-2^{x+1}}{1+2^x}$ 的值有可能是下列哪一個數? (A) $\frac{6}{5}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) -2

<解析>

假設 $2^x=y$ ➔ 令 $\frac{1-2^{x+1}}{1+2^x}=\frac{1-2^x\times2}{1+2^x}=\frac{1-2y}{1+y}=k$

$1-2y=k(y+1)$

$1-2y=ky+k$

$1-k=(k+2)y$

$\therefore y=\frac{1-k}{k+2}>0\to(1-k)(k+2)>0$，$(k-1)(k+2)<0$，則$-2<k<1$，選 B。

8. 某日有 7 節課，其中國文二節，英文、數學、物理、化學、音樂各一節，若數學不排在第四節、第五節，則課程表有幾種排法? (A)1600 (B)1800 (C)2000 (D)2400

<解析>

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦

數學不排在第四節與第五節，可選①②③⑥⑦，有 5 種選法

剩下的課程任意排列 $\frac{6!}{2!}=360$，共有 360x5=1800 種排法，選 B。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 設 x、y 是實數，且$1.5^x=(0.0015)^y=10$，求 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ 之值是_______。

<解析>

$1.5^x=10 \rightarrow 1.5=10^{\frac{1}{x}}$ ………①

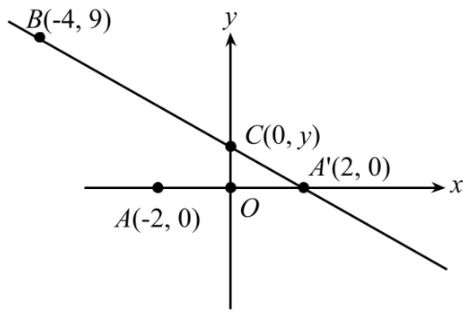
$(0.0015)^y=10 \rightarrow 0.0015=10^{\frac{1}{y}}$ ………②

$\frac{①}{②}$ 得 $\frac{1.5}{0.0015}=10^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$ ➔ $10^3=10^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

$\therefore \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$

2. In triangle ABC, $A(-2, 0)$, $B(-4, 9)$, $C(0, y)$, want to minimize the perimeter of triangle ABC, and the value of y at this time is_______.

<解析>



$\because \overline{AB}=\sqrt{(-2+4)^2+(0-9)^2}=\sqrt{85}$ 為固定邊長

且 $C(0, y)$為 y 軸上的點，使△ABC 周長最小

$\overline{AB}+\overline{BC}$ 最小(作 A 對 y 軸之對稱點 A'，使 B、C、A' 共線)

$A(-2, 0) \rightarrow A'(2, 0)$

$m_{\overleftrightarrow{A'B}}=m_{\overleftrightarrow{A'C}}$

$\therefore \frac{0-9}{2-(-4)}=\frac{0-y}{2-0} \rightarrow y=3$。

3. 多項式 $f(x)$除以 x^2+x+1 之餘式為 $2x+3$，除以 $x-3$ 之餘式為-4，求 $f(x)$除以$(x^2+x+1)(x-3)$ 之餘式為_______。

<解析>

$f(x)=(x^2+x+1)(x-3)Q(x)+(x^2+x+1)\cdot A+2x+3$……①

$f(x)=(x-3)P(x)-4$➔ $f(3)=-4$ 代入①

令 $x-3=0 \rightarrow x=3$ 代入

$f(3)=13\cdot A+6+3=-4 \rightarrow A=-1$

餘式$=(x^2+x+1)\cdot(-1)+2x+3=-x^2+x+2$

4. 過去曾因為平面或網路媒體的不當報導，導致衛生紙搶購風潮。假設不當報導 t 小時後，得知該訊息的人口比例為 $100(1-2^{-kt})\%$，且已知不當報導 8 小時後，已有 40%的人聽過，試問 24 小時後，大約有________%的人聽過此訊息。(取到整數位)

<解析>

將 $t=8$ 代入得 $100(1-2^{-8k})\%=40\%$

$1-2^{-8k}=\frac{2}{5}$ ➔ $2^{-8k}=\frac{3}{5}$

將 $t=24$ 代入得 $100(1-2^{-24k})\%=100[1-(2^{-8k})^3]\%=100\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^3\right]\%=78.4\%\fallingdotseq 78\%$

5. There are 10 data in the table on the right. The average of the first 6 numbers is 9. The average of the remaining 4 numbers is 4. Find the standard deviation of all 10 numbers as k, and find k=________.

組別	個數 n	平方和 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots\ldots+x_n^2$
前 6	6	540
後 4	4	80

<解析>

前 6 筆數據分別為 x_1、x_2、x_3、………、x_6

後 4 筆數據為 x_7、x_8、x_9、x_{10}

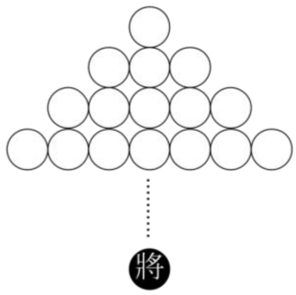
$\frac{x_1+x_2+x_3+.....+x_6}{6}=9$ ➔ $x_1+x_2+x_3+.....+x_6=54$

$\frac{x_7+x_8+x_9+x_{10}}{4}=4$ ➔ $x_7+x_8+x_9+x_{10}=16$

故新的平均數$=\frac{54+16}{10}=7$

標準差$=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+.....+x_{10}^2}{10}-7^2}=\sqrt{13}$

6. 古代陣法，「魚鱗陣」的將領位於陣形的正後方，士兵依右圖排列: 第 1 列有 1 人，第 2 列有 3 人，第 3 列有 5 人，……..，依此類推。設 a_n 是前 n 列士兵的總人數，已知數列$\langle a_n\rangle$的遞迴關係為 $\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=a_{n-1}+k \end{cases}$。當 $k=39$ 時，前 n 項的和為________。



<解析>

$a_2=a_1+3$，$a_3=a_2+5$，$a_4=a_3+7$，……..

得 $a_n=a_{n-1}+(2n-1)$，故 $k=2n-1$

又 $k=39$，$2n-1=39$，$n=20$

$a_1=1$，$a_2=1+3=2^2$，$a_3=1+3+5=3^2$ ➔ $a_{20}=20^2$，$S_{20}=1^2+2^2+3^2+\ldots+20^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{20\times21\times41}{6}=2870$

7. 化簡 $\sqrt{6+\sqrt{8}+\sqrt{12}+\sqrt{24}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$，$x<y<z$，則數對$(x, y, z)$= ________。

<解析>

兩邊同時平方

$6+\sqrt{8}+\sqrt{12}+\sqrt{24}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{xz}$，且$0<x<y<z$

①$x+y+z=6$，②$xy=2$，③$yz=6$，④$xz=3$

∴②×③×④→$x^2y^2z^2=36$ 且 $xyz>0$，$xyz=6$

代入②: $z=3$，代入③: $x=1$，代入④: $y=2$

則$(x, y, z)=(1, 2, 3)$

8. 當 $b=\dfrac{10^{20000}}{10^{100}+3}$，則 b 之個位數字為________。

<解析>

① $b=\dfrac{10^{20000}}{10^{100}+3}=\dfrac{(10^{100})^{200}-3^{200}}{10^{100}+3}+\dfrac{3^{200}}{10^{100}+3}=\dfrac{(10^{100})^{200}-3^{200}}{10^{100}+3}+\dfrac{9^{100}}{10^{100}+3}$，$0<\dfrac{9^{100}}{10^{100}+3}<1$ (小數部分)

∴b 的整數部分$=\dfrac{(10^{100})^{200}-3^{200}}{10^{100}+3}$

②令 $10^{100}=t$ ➔ b 的整數部分$=\dfrac{t^{200}-3^{200}}{t+3}=\dfrac{(t^2)^{100}-9^{100}}{t+3}=\dfrac{(t^2-9)[(t^2)^{99}+.....+(t^2\cdot 9^{98}+9^{99}]}{t+3}$

$=(t-3)[(t^2)^{99}+\ldots\ldots+t^2\cdot 9^{98}+9^{99}]=(100\ldots\ldots0-3)[\square\square\ldots\ldots00+9^{99}]=(\ \ldots\ldots7)(\ \ldots\ldots9)=\ \ldots\ldots3$

三、計算題(每題 10 分，共 20 分) ※未寫出計算過程不予計分

1. 解$\sqrt[3]{37+x}-\sqrt[3]{x}=1$。

<解析>

令$\sqrt[3]{37+x}=u$，$-\sqrt[3]{x}=v$ ➔ $37+x=u^3$，$-x=v^3$

①$u+v=1$

②$u^3+v^3=37$

且 $u^3+v^3=(u+v)^3-3uv(u+v)$

∴$37=1-3uv\to uv=-12$

得出 $u=4$，$v=-3$ 或 $u=-3$，$v=4$

∴$x=27$ 或 $x=-64$

2. 一光線通過 $A(-4, 5)$，經 x 軸反射後與圓: $(x-2)^2+(y-2)^2=5$ 相切，求原光線之方程式為何?

<解析>

A 對 x 軸的對稱點為 $A'(-4, -5)$

L': $y+5=m(x+4)$

➔$mx-y+4m-5=0$

則 $d(O, L')=r$

∴$\dfrac{|2m-2+4m-5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$ ➔ $(6m-7)^2=5(m^2+1)$

∴$31m^2-84m+44=0$

$\to(31m-22)(m-2)=0$

∴$m=\dfrac{22}{31}$(不合) 或 2 (取斜率大者符合題意)

∴L': $2x-y+3=0$，且 L 與 L' 對稱於 x 軸

則 L: $2x+y+3=0$ 即為所求。